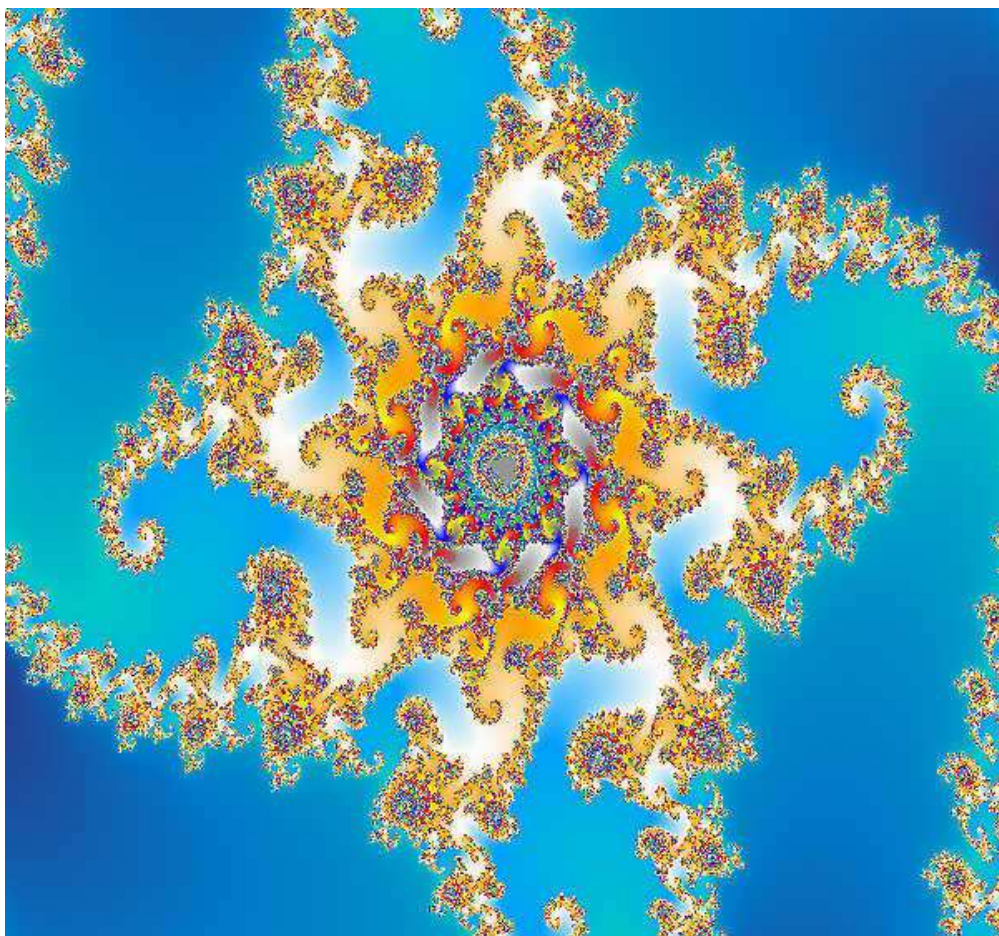


**PREPARATION AUX AGREGATIONS
INTERNES DE MECANIQUE ET GENIE
MECANIQUE**

ASSERVISSEMENTS

OUTILS

MATHEMATIQUES



PREPARATION AUX AGREGATIONS INTERNES DE MECANIQUE ET GENIE MECANIQUE

ASSERVISSEMENTS OUTILS MATHEMATIQUES

Bien que la spécialisation soit un trait nécessaire de notre civilisation, elle doit être complétée par l'intégration d'une pensée qui traverse les disciplines. Un obstacle permanent s'opposant à cette intégration est la ligne de démarcation entre ceux pour qui l'usage des mathématiques est chose aisée et les autres.

Murray GELL-MANN
Prix Nobel de physique.

Illustration de couverture : Fractale de Mandelbrot

AVANT-PROPOS.

Jusqu'à une époque récente, les asservissements étaient traités au niveau ingénieur ou second cycle pour les mécaniciens et, d'une manière générale, les ouvrages concernant cette discipline sont difficilement abordables par un lecteur ne possédant pas un niveau de premier cycle universitaire. La majorité des enseignants qui désirent se préparer au concours d'Agrégation interne de Génie Mécanique ou de Mécanique ne sont plus familiers avec des notions qu'ils n'utilisent pas ou peu dans leur exercice quotidien et vont se heurter à ce problème.

L'objectif de ce premier volume est de faire gagner un temps précieux au candidat qui doit simultanément préparer le concours, rédiger un important dossier pédagogique et assurer son enseignement. Il regroupe quelques rappels ainsi qu'un grand nombre de démonstrations en rapport avec le cours, utilisant les notations adéquates et suffisamment détaillées pour qu'un lecteur même "rouillé" puisse en suivre le fil. Ce n'est en aucun cas un cours de mathématiques, mais plutôt un aide-mémoire à consulter sur des points spécifiques au fur et à mesure des besoins.

Le second volume concerne le cours d'asservissements proprement dit, allégé des démonstrations contenues dans le premier et auxquelles il fait systématiquement référence. Le troisième concerne l'aspect technologique et les applications.

Je tiens à remercier les collègues qui m'ont signalé les erreurs et les coquilles qu'ils ont pu détecter lors de l'utilisation de ce poly. Elles ont été corrigées dans cette quatrième édition mais il en reste probablement quelques-unes. Les variables apparaissent tantôt en italique, tantôt non : il faut les considérer comme étant identiques.

francis.binet@ac-versailles.fr

Chapitre 1

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

«René Thom, le grand topologue et mathématicien est le seul à m'avoir surpris en confirmant mes trouvailles paranoïaques-critiques sur la gare de Perpignan »

Salvador Dali

1-1 DERIVEES.

REMARQUE PREALABLE : Dans tout ce qui suit, on considèrera des "bonnes fonctions", c'est à dire des fonctions continûment dérivables.

1-1-1 DEFINITION :

La dérivée f' d'une fonction f en un point x_0 est la limite :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Géométriquement (voir Fig.1-1), c'est la limite du taux d'accroissement entre x et x_0 , mesurant la pente de la droite (D). En rapprochant mentalement le point M du point Mo , on voit que la droite (D) se rapproche de la tangente à la courbe en Mo : la dérivée $f'(x_0)$ est donc la pente de la tangente en Mo .

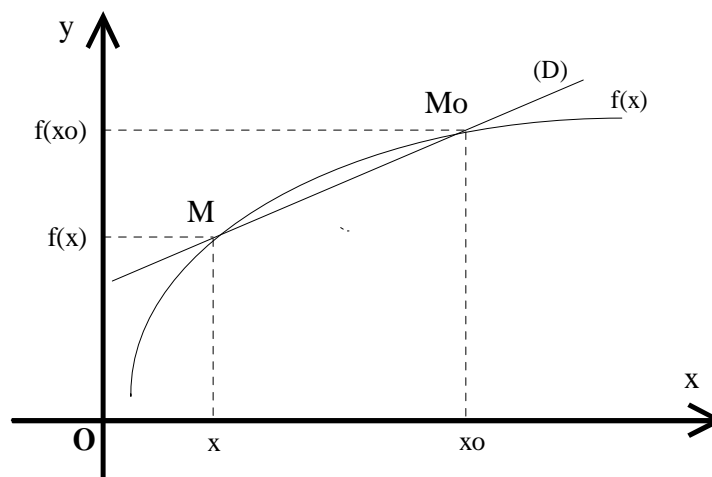


Fig.1-1

L'équation de la tangente en Mo est facile à exprimer : c'est une droite qui est donc de la forme : $y = ax + b$ avec $a = f'(x)$ et qui passe par le point (x_0, y_0)

$$\Rightarrow y(x_0) = f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$\Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Finalement l'équation de la tangente en Mo est: $y = f'(x_0) \cdot x + [f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0]$

que l'on rencontre souvent sous la forme: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

1-1-2 VARIATION D'UNE FONCTION.

Les théorèmes suivants sont très utiles lors de l'étude d'une fonction.

a) Soit une fonction f , dérivable sur un intervalle I :

Si la dérivée de f est positive sur I , alors f est croissante sur I .

Si la dérivée de f est négative sur I , alors f est décroissante sur I .

Si la dérivée de f est nulle sur I , alors f est constante sur I .

b) Soit une fonction f , dérivable en un point x_0 :

Si la dérivée de $f(x)$ en x_0 , $f'(x_0)$ s'annule en changeant de signe alors f présente un maximum ou un minimum relatif en x_0 .

c) Soit une fonction f , deux fois dérivable sur un intervalle I :

Si la dérivée seconde de f est positive sur I , alors f est convexe sur I .

Si la dérivée seconde de f est négative sur I , alors f est concave sur I .

Si la dérivée seconde de f est nulle sur I , alors f est linéaire sur I .

d) Soit une fonction f , deux fois dérivable en un point x_0 :

Si la dérivée seconde de $f(x)$ en x_0 , $f''(x_0)$ s'annule en changeant de signe alors f présente un point d'inflexion en x_0 .

1-1-3 CALCUL DES DERIVEES.

Les formules de dérivation permettent de déterminer la dérivée d'une fonction à partir des dérivées de fonctions élémentaires.

Notations:

La dérivée nième d'une fonction f se note : $f^{(n)}(x)$, avec n entre parenthèses.

La puissance nième d'une fonction f se note : $f^n(x)$.

La fonction réciproque d'une fonction f se note : $f^{-1}(x)$

La fonction composée de deux fonctions f et g se note : $(f \circ g)(x)$

Les tableaux page suivante contiennent les formules de dérivation usuelles. La tradition est de noter les fonctions par u et par v au lieu de f et de g .

FONCTION	DERIVEE
$u + v$	$u' + v'$
$u.v$	$u'v + uv'$
$K.u$	$K.u'$
$\frac{1}{u} ; u \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v} ; v \neq 0$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u} ; u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n ; n \in \mathbb{Z}$	$nu^{n-1}u'$
$(f \circ g)'$	$(f' \circ g)g'$
$(f^{-1})'$	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

FONCTION USUELLE	DERIVEE
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^k} ; k \neq -1$	$-\frac{k}{x^{k+1}}$
$\sqrt{x} ; x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

1-1-4 LINEARISATION D'UNE FONCTION AUTOUR D'UN POINT.

La linéarisation d'une fonction autour d'un point est une opération extrêmement courante en asservissements : En effet, les relations entre variables sont la plupart du temps des fonctions non-linéaires alors que l'on préfère travailler sur des relations linéaires pour des raisons de commodité et de simplicité. Suivant l'allure de la fonction à linéariser, on utilisera des méthodes différentes. Nous nous limiterons au cas de la linéarisation d'une courbe régulière autour d'un point non singulier, c.à.d. un point en lequel la courbe admet une tangente unique à pente ni nulle, ni infinie. Pour les autres méthodes (méthode de la corde, méthode du premier harmonique, méthode de l'énergie équivalente, etc.), qui concernent les asservissements non-linéaires, se référer à un ouvrage spécialisé.

Considérons une fonction $y = F(x)$ représentée Fig.1-2. Il n'est pas possible de la linéariser sur tout son domaine de définition sans faire une grossière approximation. On choisit donc un point de fonctionnement privilégié $M_0 = (X_0, Y_0)$ autour duquel on peut linéariser, étant bien entendu que le résultat obtenu n'est valable qu'autour de ce point dans une fourchette dépendant de l'erreur Δ que l'on peut tolérer. On assimile localement la courbe à sa tangente en M_0 dont la pente K est la dérivée de $F(x)$ en M_0 . Ceci permet d'écrire que pour une valeur d'entrée X , la sortie est $F(X) = Y_0 + K(X - X_0)$ correspondant au point M' . L'erreur commise est Δ .

On peut raisonner en accroissements : $\Delta Y = K \Delta X$ avec $\Delta Y = Y - Y_0$ et $\Delta X = X - X_0$
ce qui revient à effectuer un changement de repère : $x' = x - X_0$ et $y' = y - Y_0$
Dans ce repère, les coordonnées du point M sont (X', Y') avec $Y' = KX'$ relation linéaire.

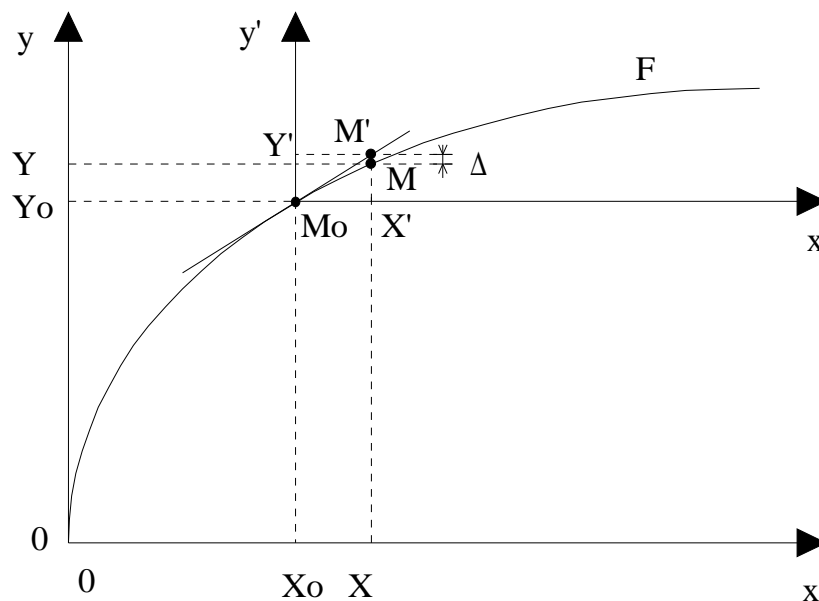


Fig1-2: Linéarisation autour d'un point.

Exemple: Linéariser $F(x) = x^n$ autour d'un point $M = (X_0, Y_0)$

$$F'(X_0) = n \cdot X_0^{n-1} \Rightarrow \Delta Y_0 = n \cdot X_0^{n-1} \cdot \Delta X_0$$

$$\text{D'autre part : } Y_0 = X_0^n \Rightarrow X_0^{n-1} = \frac{Y_0}{X_0}$$

$$\text{Finalement: } \frac{\Delta Y_0}{Y_0} = n \frac{\Delta X_0}{X_0}$$

1-2 INTEGRALES.

1-2-1 INTRODUCTION.

Le calcul intégral est utilisé pour de nombreuses applications en mécanique. On peut citer entre autres :

- La valeur moyenne f_{moy} d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$: $f_{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
- La valeur efficace f_{eff} d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$: $f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)dx}$
- La masse M d'un solide dans le cas d'un volume : $M = \iiint_V \rho dv$
- Le centre d'inertie G d'un système matériel : $\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_{P \in S} \vec{OP} dm$
- Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe dans le cas d'un volume : $I = \iiint_V r^2(P) \rho(P) dv$
- Les calculs d'aires, de volume, de travail, de distance ou de vitesse par intégration respectivement de la vitesse ou de l'accélération, etc.

L'intégration d'une fonction peut s'effectuer de deux manières :

Soit on connaît une primitive de la fonction à intégrer et on peut alors en déduire toutes les primitives en ajoutant une constante : c'est le cas de toutes les fonctions simples et usuelles. Dans les problèmes de mécanique, la constante sera déterminée par les conditions initiales.

Soit on ne connaît pas de primitive (ce qui est souvent le cas), et il faut effectuer l'intégration par une méthode numérique approchée.

1-2-2 INTERPRETATION GEOMETRIQUE. SOMMES DE DARBOUX.

Considérons une fonction f , intégrable sur un intervalle $[a,b]$ (voir Fig.1-2). On souhaite calculer l'aire A du domaine plan délimité par cette courbe entre les points a et b . Pour ce faire, on va découper la surface en $(n+1)$ rectangles délimités d'un côté par l'axe des x et de l'autre côté par la courbe considérée.

Il existe deux sommes de Darboux :

- a) La "petite" somme $s(\sigma) = (x_1 - a) \cdot f(a) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + \dots + (b - x_n) \cdot f(x_n)$ représentant géométriquement la somme des rectangles "inférieurs" (Hachurés).
- b) La "grande" somme $S(\sigma) = (x_1 - a) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_2) + \dots + (b - x_n) \cdot f(b)$ représentant géométriquement la somme des rectangles "supérieurs" (Hachurés + blancs).

Concrètement, la petite somme de Darboux est une valeur approchée par défaut de A et la grande somme de Darboux est une valeur approchée par excès de A.

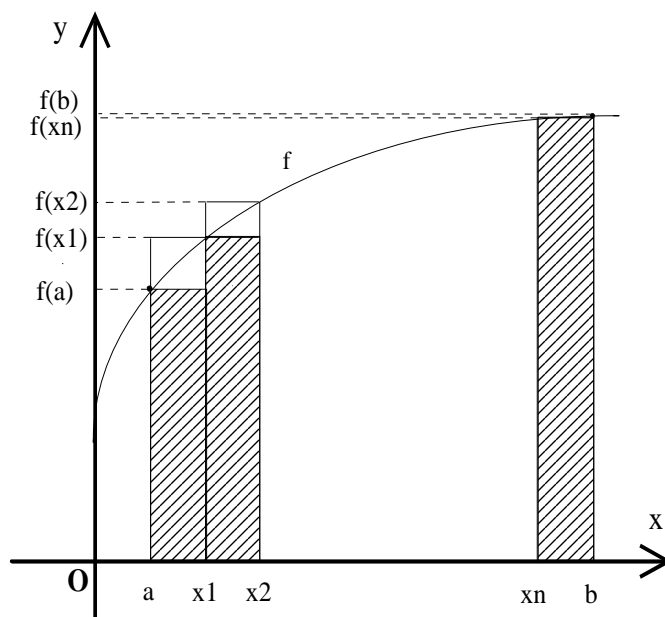


Fig. 1-3

En diminuant la largeur des rectangles jusqu'à une valeur dx , les deux sommes de Darboux vont converger vers une limite commune qui est égale à l'aire A. On montre que cette limite est aussi l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et on écrit : $A = \int_a^b f(x)dx$.

1-2-3 METHODES DE CALCUL APPROCHE.

Ces méthodes sont appliquées dans deux cas :

- * soit l'on ne peut pas déterminer une primitive de la fonction considérée au moyen de fonctions élémentaires,
- * soit la fonction à intégrer n'est connue que par certaines valeurs qu'elle prend sur l'intervalle d'intégration (c'est le cas pour une fonction échantillonnée).

1-2-3-1 Méthode des rectangles.

Du § 1-2-2, on déduit immédiatement une méthode de calcul approché de l'intégrale de f , consistant à calculer les deux sommes de Darboux qui donnent un encadrement de la valeur recherchée. La précision du calcul augmente avec le nombre n de points de subdivision de l'intervalle $[a, b]$. L'erreur ainsi commise n'est pas connue en général, mais on démontre que sa valeur absolue possède un majorant :

$$|e| < M \frac{(b-a)^2}{2(n+1)} \quad \text{avec} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

1-2-3-2 Méthode des trapèzes.

Dans le cas où l'on désire une meilleure précision de calcul, on emploie la méthode des trapèzes qui consiste à remplacer les arcs de courbe par leur corde respective. (voir Fig.1-3bis)

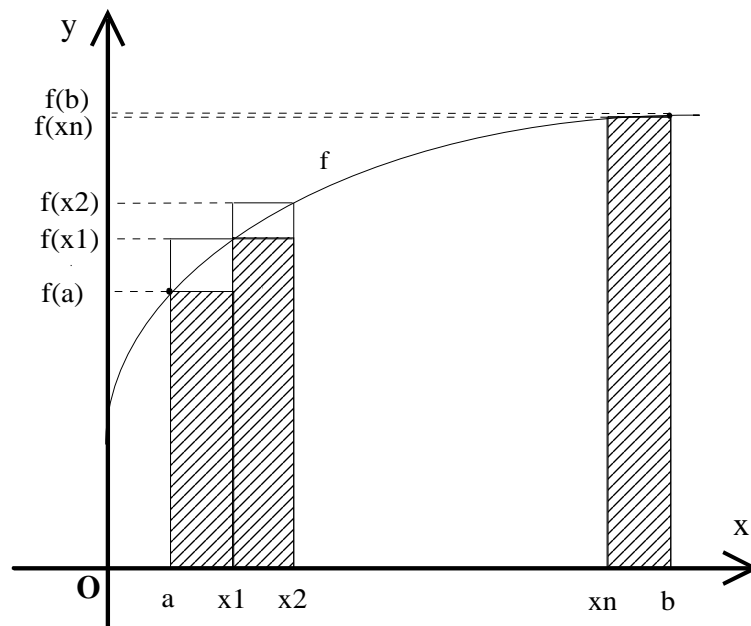


fig. 1-3 bis

L'aire du trapèze hachuré est égale à : $\frac{(x_1 - a)[f(x_1) + f(a)]}{2}$

La somme des aires des trapèzes donne une valeur approchée de l'intégrale de f. Elle correspond à la moyenne de deux sommes de Darboux

Comme dans le cas précédent, on démontre que l'erreur commise possède un majorant

$$\frac{M}{12(n+1)^2} (b-a)^3 \quad \text{avec} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Par contre, il n'existe pas l'équivalent d'une "petite" somme et d'une "grande" somme ; suivant que la courbe est concave ou convexe, le calcul donnera un résultat par excès ou par défaut.

Il existe d'autres méthodes, plus précises, comme celle de Simpson consistant à approcher l'arc de courbe par une parabole. Se référer à un ouvrage de mathématiques.

1-2-4 METHODES DE CALCUL DIRECT.

Elles consistent à ramener la fonction à intégrer à l'une des fonctions dont on connaît une primitive. Le tableau suivant fournit les plus courantes.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{te} \quad (n \neq -1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C^{te}$
$\int \sin x dx = -\cos x + C^{te}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C^{te}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot} x + C^{te}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C^{te}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C^{te}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C^{te}$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C^{te}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C^{te}$

Il existe de nombreuses méthodes permettant de se ramener à une (ou des) fonction(s) dont on connaît une primitive : décomposition en somme, changement de variable, décomposition en éléments simples, intégration par parties, utilisation de fonctions trigonométriques, etc.

On rappellera seulement la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Pour les autres, se référer à un ouvrage de mathématiques.

1-3 SERIES ENTIERES.

Une série entière est une série de la forme : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

avec $n = (0, 1, 2, \dots)$. Les coefficients a_i peuvent être réels ou complexes.

L'exemple le plus connu est la série géométrique : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

Cette série est divergente pour $|x| \geq 1$

Elle converge vers : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$

Il est possible, sous certaines conditions, de développer une fonction en série entière. Le théorème de Mac Laurin permet d'obtenir le développement en série entière de fonctions usuelles dont les plus utiles sont rappelées ci-dessous :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \dots$$

$$\operatorname{Arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

1-4 ETUDE DE FONCTIONS.

Nous allons, à titre d'exemple, étudier succinctement quelques fonctions souvent rencontrées en asservissements

1-4-1 FONCTIONS CIRCULAIRES.

Ces fonctions sont bien connues des mécaniciens. Par contre, les notions fréquentielles associées, omniprésentes en asservissements (voir réponse harmonique), méritent que l'on s'y attarde un peu.

La fonction du temps $\sin(\omega t + \phi)$ en est un exemple que nous allons observer suivant quatre cas en prenant des valeurs différentes pour ω et pour ϕ :

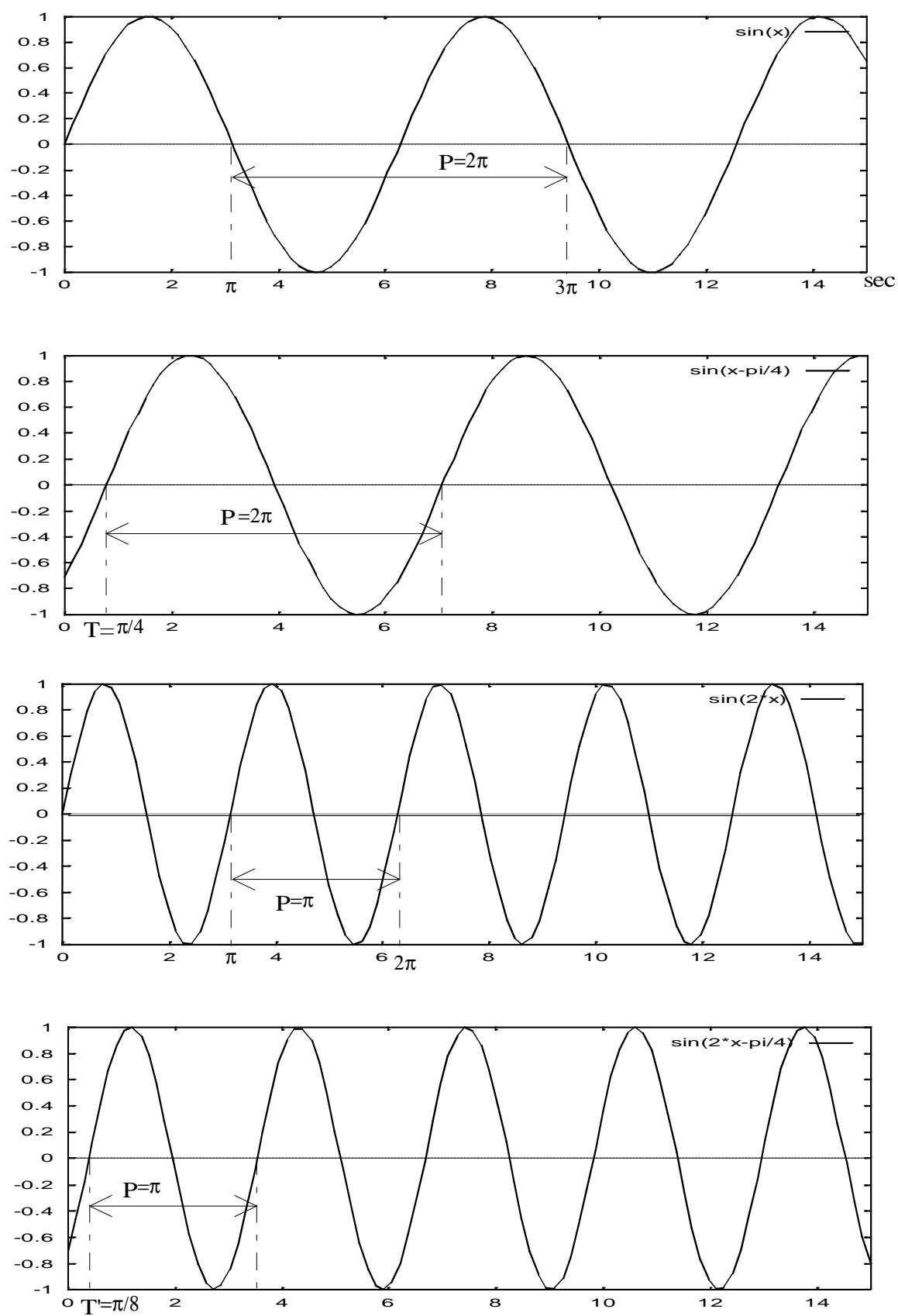


Fig.1-4

L'angle ϕ apparaissant dans l'expression de la fonction s'appelle le déphasage. Il s'exprime en radians.

La grandeur ω en facteur du temps s'appelle la pulsation. Elle s'exprime en radians/sec.

La fréquence se déduit de la pulsation par : $f = \omega/2\pi$. Elle s'exprime en Hertz.

La période est l'inverse de la fréquence : $P = 1/f = 2\pi/\omega$. Elle s'exprime en secondes.

Les quatre courbes sont, de haut en bas sur la Fig.1-4 :

- a) La fonction $\sin(t)$
- b) La fonction $\sin(t-\pi/4)$
- c) La fonction $\sin(2t)$
- d) La fonction $\sin(2t-\pi/4)$

cas b) La sinusoïde est retardée d'un temps égal à $\pi/4$ secondes par rapport à $\sin(t)$: retard T .

cas c) La sinusoïde vibre deux fois plus vite que $\sin(t)$: sa pulsation (et donc sa fréquence) est double.

cas d) La sinusoïde vibre également deux fois plus vite que $\sin(t)$ **mais son retard T' n'est plus $\pi/4$ s mais $\pi/8$ s.**

Conclusions sur la fonction $\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega(t + T)$:

Sa pulsation est ω en rd/s.

Sa fréquence est $f = \omega/2\pi$ en Hz.

Sa période est $P = 1/f$ en secondes.

Son déphasage est ϕ en radians.

Si $T < 0$, son retard est $T = |\phi/\omega|$ en secondes.

Si $T > 0$, son avance est $T = |\phi/\omega|$ en secondes.

1-4-2 FONCTION ARCTG(X).

La fonction $\text{tg}(x)$ est périodique de période π et strictement croissante sur l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur lequel elle prend des valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$. (Voir Fig.1-5)

La fonction arctg est la réciproque de la fonction tg restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sa dérivée est : $\text{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (voir tableau des dérivées § 1-1-3). Cette expression étant toujours positive, la fonction arctg est donc strictement croissante. On la trace directement en remarquant que : $y = \text{arctg}(x) \Leftrightarrow x = \text{tg}(y)$ pour $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (voir Fig.1-6)

REMARQUE. La fonction $\text{arctg}(\phi)$ ne permet pas de lever l'indétermination sur 2π de l'angle ϕ car $\text{tg}(\phi) = \text{tg}(\alpha) \Leftrightarrow \phi = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Cette équation possédant deux solutions, il faut connaître le signe de $\sin(\phi)$ pour lever l'indétermination.

Par exemple, l'équation $\phi = \text{arctg}(1)$ possède les deux solutions : $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\phi = \frac{5\pi}{4}$

l'indétermination est levée si l'on connaît le sin car, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

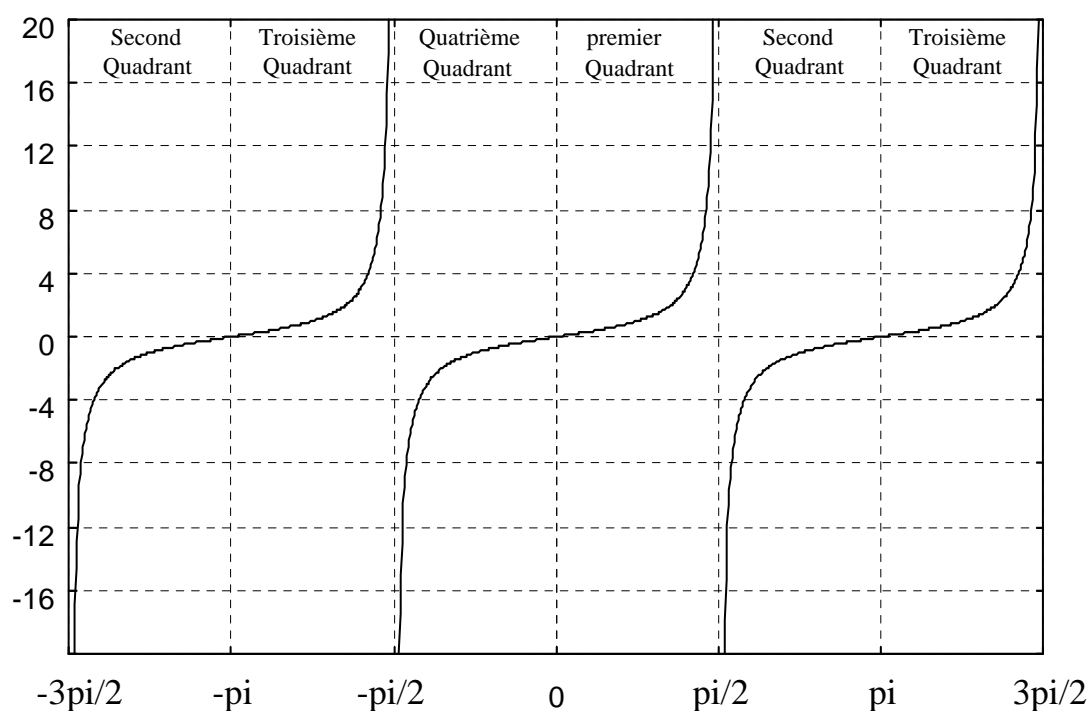


Fig.1-5: tg(x)

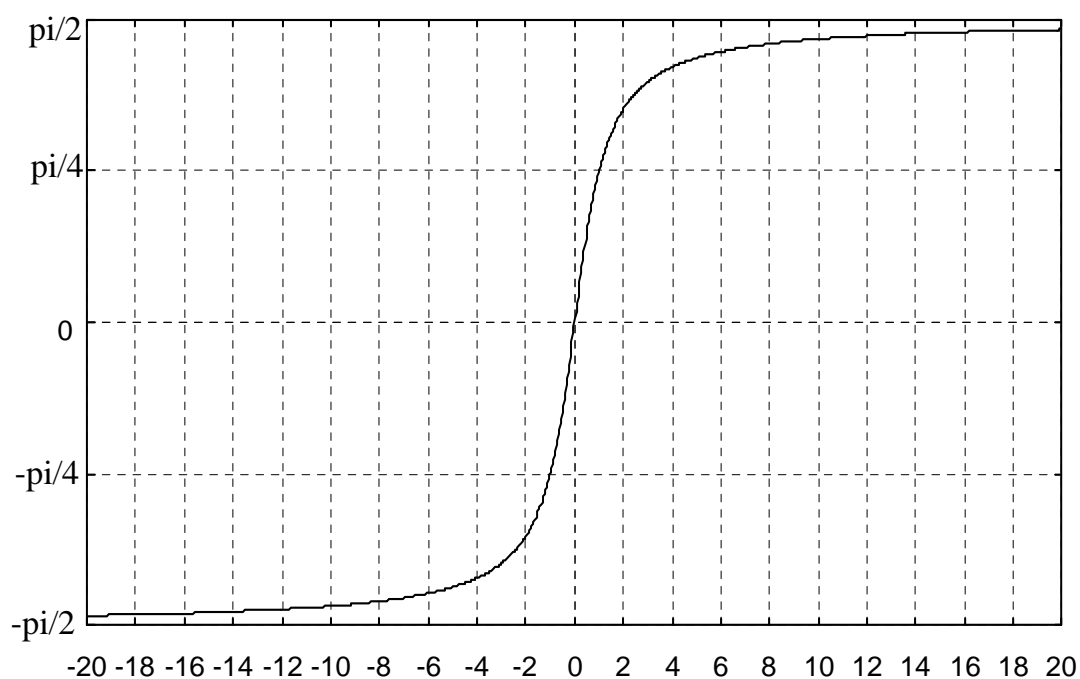


Fig.1-6: arctg(x)

Exemple: Etude de la fonction $\Phi(\omega) = -\text{Arctg}\left(\frac{2z\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$ $z > 0$; $\omega_n > 0$ $\omega > 0$

Cette fonction se rencontre lors de l'étude des systèmes linéaires du second ordre. On effectue traditionnellement un changement de variable $u = \frac{\omega}{\omega_n}$, u étant appelée pulsation réduite.

La fonction étudiée s'écrit en fonction de u (u positif) :

$$\Phi(u) = -\text{Arctg}\left(\frac{2zu\omega_n^2}{\omega_n^2 - u^2\omega_n^2}\right) = -\text{Arctg}\left(\frac{2zu}{1-u^2}\right) = -\text{Arctg}(f(u))$$

La dérivée de $f(u) = \frac{2zu}{1-u^2}$ s'obtient en utilisant la formule de dérivation : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
(attention le "u" de cette formule est égal à 2zu. Ne pas confondre les deux "u").

$$f'(u) = \frac{(1-u^2)2z + 4zu^2}{(1-u^2)^2} = \frac{1+2zu^2}{(1-u^2)^2} \quad \text{toujours positive.}$$

f(u) est donc toujours croissante et son allure est la suivante :

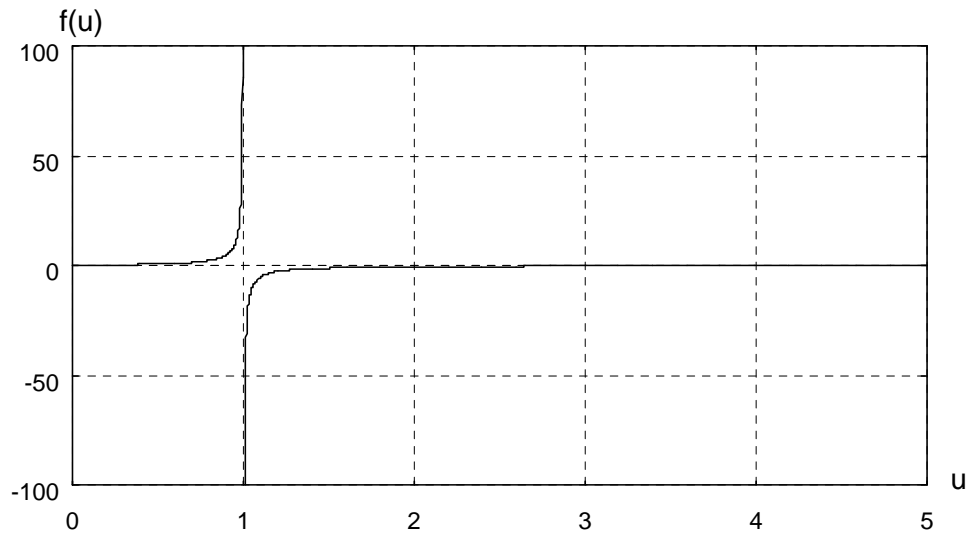


Fig.1-7: f(u) pour z=0,5

On en déduit les valeurs remarquables de $\Phi(u)$:

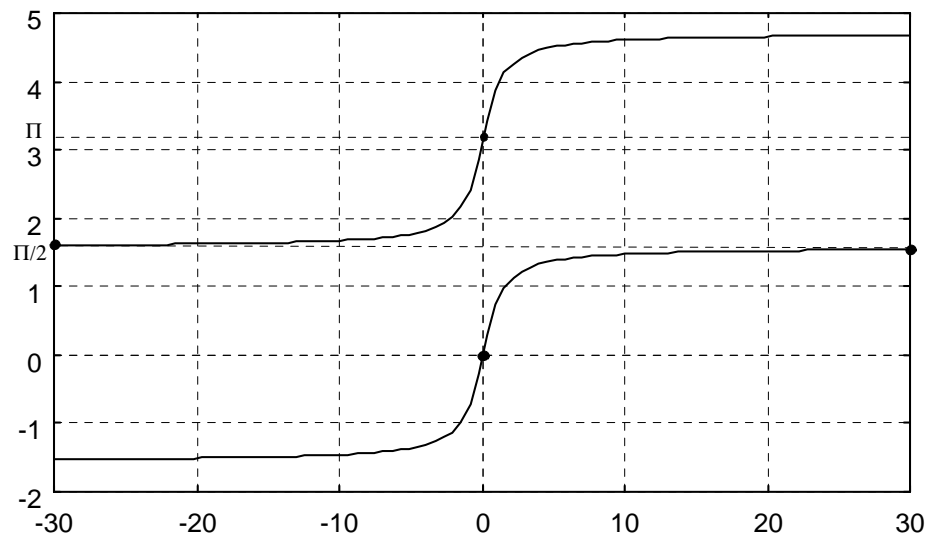
Pour $u = 0$, $f(u) = 0$ et $\Phi(u) = -\text{Arctg}(0) = 0^\circ$

Pour $u = 1^-$, $f(u) = +\infty$ et $\Phi(u) = -\text{Arctg}(+\infty) = -90^\circ$

Pour $u = 1^+$, $f(u) = -\infty$ et $\Phi(u) = -\text{Arctg}(-\infty) = -90^\circ$

Pour $u = \infty$, $f(u) = 0^-$ et $\Phi(u) = -\text{Arctg}(0^-) = -180^\circ$

REMARQUE: pour u compris entre 1 et ∞ il faut prendre les valeurs de la fonction Arctg telles que la fonction Φ soit continue en $u=1$, ce qui ne serait pas le cas si l'on utilisait les valeurs lues sur la courbe fig. 1-6 : la valeur de Φ passerait alors brutalement de -90° à $+90^\circ$, ce qui est impossible pour des raisons physiques. On choisit donc une détermination de la fonction Arctg (qui est définie modulo π) telle que Φ varie continûment entre 0° et -180° , c'est à dire dans le troisième et le quatrième quadrant.

Fig.1-8: fonction $\text{Arctg}(x)$

L'allure de la fonction Φ est finalement :

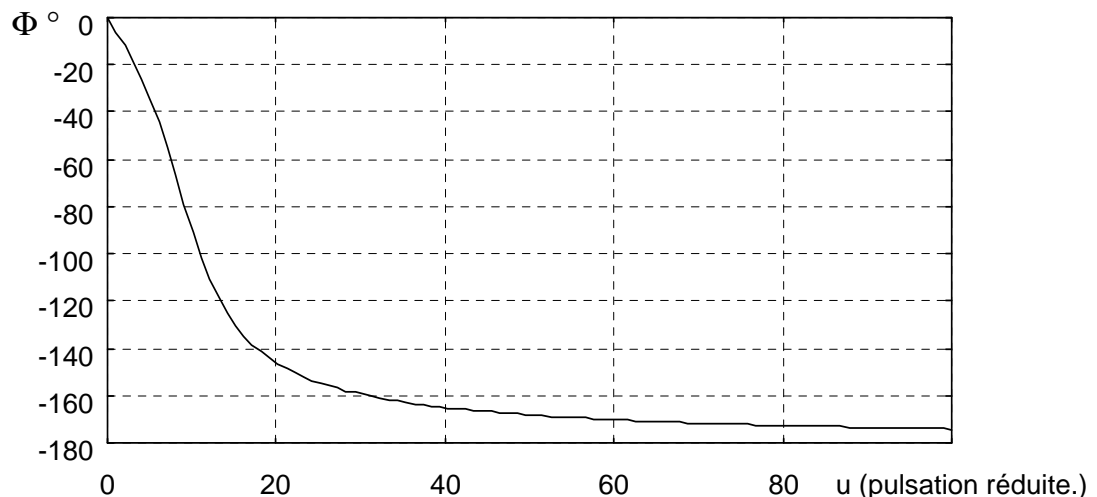


Fig.1-9.

En pratique, cette fonction sera représentée en coordonnées semi-logarithmiques pour u . (voir diagramme de Bode dans le cours d'asservissements)

1-4-3 FONCTION LOG(X) EN COORDONNEES LOGARITHMIQUES.

La fonction logarithme décimal réalise la transformation :

x	...	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	...
Log(x)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

Elle est définie pour $x > 0$ et est représentée Fig.1-10 en coordonnées cartésiennes.

Elle possède les propriétés suivantes :

$$\log(a^n) = n \log(a)$$

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

On détermine sa dérivée en utilisant la relation : $\log_a'(x) = \frac{k}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}$

qui donne dans le cas du logarithme décimal : $\log'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$

x étant strictement positif, cette dérivée est donc positive. On vérifie que la fonction Log est croissante, mais de plus en plus faiblement lorsque x augmente (à l'inverse de la fonction exponentielle).

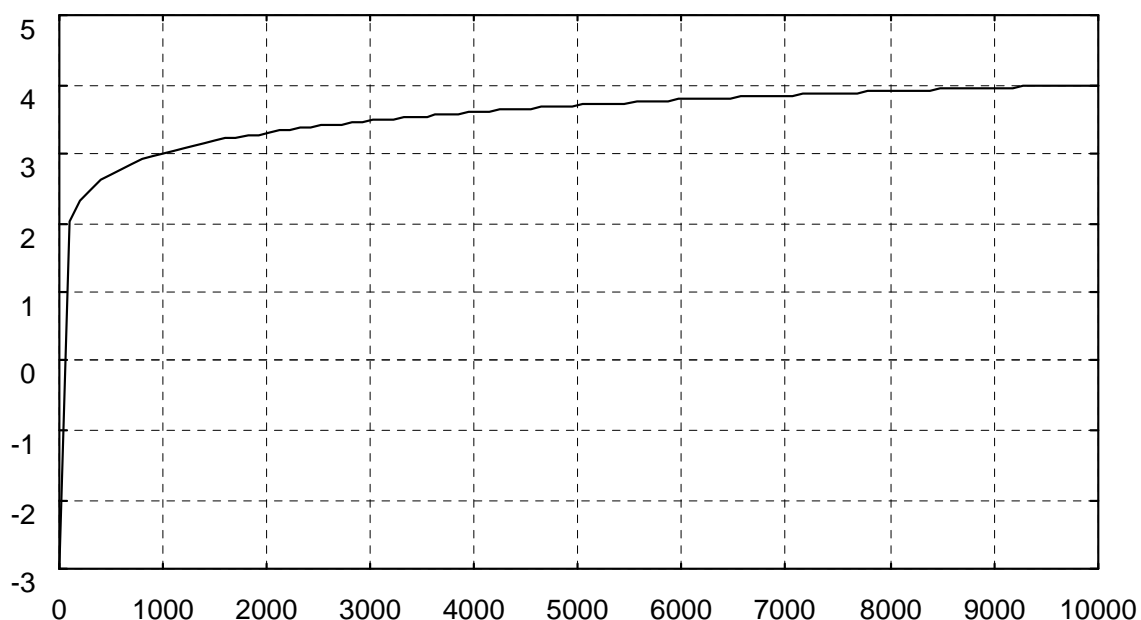


Fig.1-10: Log(x)

Cherchons maintenant à tracer cette courbe en coordonnées semi-logarithmiques.

L'axe des y est inchangé alors que l'axe des x est gradué en $\text{Log}(x)$: à chaque augmentation d'un facteur 10 des x, la graduation augmente comme $\text{Log}(x)$, c.à.d. d'une unité. La courbe obtenue est donc une droite de pente 1 (voir Fig.1-11).

L'intérêt de cette représentation est évident lorsque l'on compare les courbes Fig.1-10 et Fig.1-11 : La représentation cartésienne est difficile à lire (sans parler d'effectuer un relevé de points !) car la pente est soit trop faible soit trop forte. Ce problème n'apparaît pas en représentation semi-log. En asservissements, les diagrammes de réponse en fréquence de Bode sont en coordonnées semi-log.

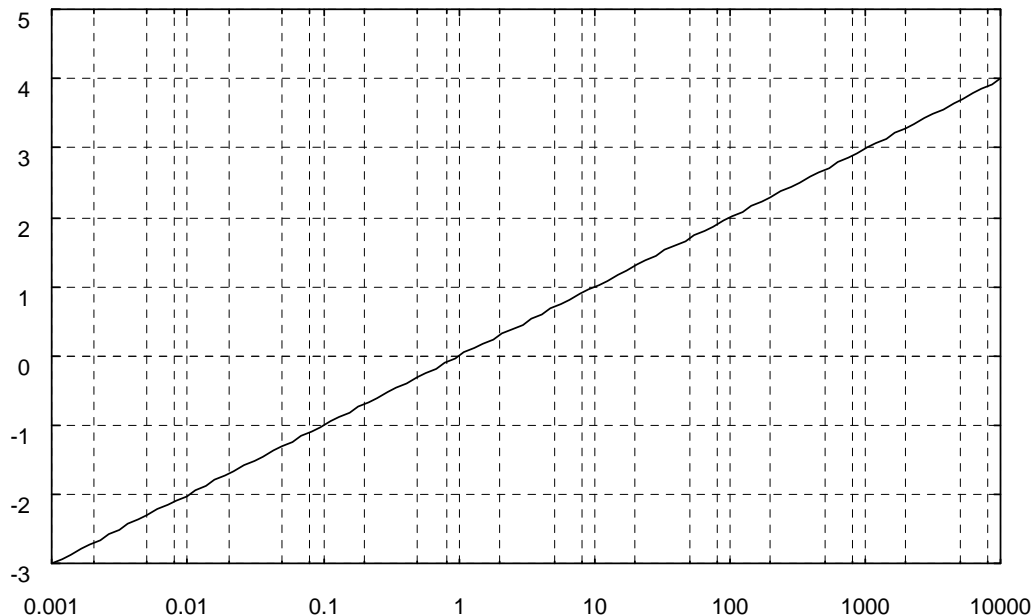


Fig.1-11: $\text{Log}(x)$

REMARQUE: Contrairement à la représentation en coordonnées cartésiennes, il n'existe pas de point $x = 0$ en coordonnées semi-log, car la fonction Log n'est pas définie en ce point. L'axe des y est ici centré sur le point $x = 0,0001$. On pourrait le décaler vers la gauche en le centrant sur $x = 0,00001$ puis $x = 0,000001$ et ainsi de suite sans jamais pouvoir atteindre 0.

1-4-4 REPONSE D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE A UN ECHELON.

Dans les chapitres 4 et 5, nous verrons ce qu'est un système du premier ordre et nous montrerons que, soumis à une entrée échelon unitaire (de 1 Volt dans notre exemple), sa sortie est alors :

$$s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \text{ exprimée en Volts}$$

K est le gain statique du système ; prenons $K = 10$

T est la constante de temps du système ; prenons $T = 100\text{ms}$.

Etudions cette courbe pour $t > 0$.

La dérivée $s'(t)$ est : $s'(t) = \frac{d}{dt} \left[K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ toujours positive. On en déduit que la courbe est croissante.

La pente à l'origine est $s'(0) = K/T = 10/100 = 0,1$ V/sec.

La pente à l'infini est $s'(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] = \frac{K}{T} e^{-\infty} = 0$; Existence d'une asymptote horizontale.

La valeur de $s(t)$ en zéro est $s(0) = K(1-1) = 0$

$s(t)$ tend, pour t infini, vers : $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] = K(1-0) = K = 10$ Volts

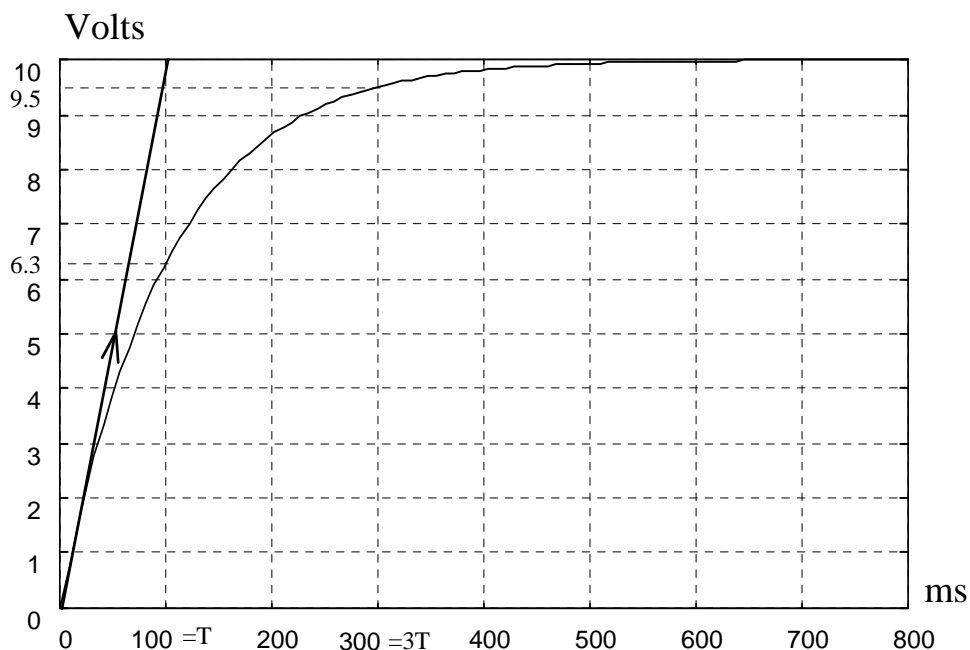


Fig.1-12: $s(t) = 10 \left[1 - e^{-\frac{t}{100}} \right]$

Certains points caractéristiques sont tracés sur la courbe Fig.1-12 :

- au bout d'un temps égal à T , le système a atteint 63% de sa réponse permanente.

En effet, $s(T) = K \left(1 - e^{-\frac{T}{T}} \right) = K(1 - e^{-1}) = K(1 - 0,3678) = 0,632K$

- au bout d'un temps égal à trois fois T , le système a atteint 95% de sa réponse permanente.

$s(3T) = K \left(1 - e^{-\frac{3T}{T}} \right) = K(1 - e^{-3}) = K(1 - 0,0497) = 0,9502K$

Nous reviendrons en détail sur la signification physique de tout ceci dans le cours D'asservissements.

4-5 REPONSE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE A UN ECHELON (voir §4 et §5).

La sortie d'un système du second ordre soumis à une entrée échelon unitaire de 1 Volt dans notre exemple est de la forme (cas où $z < 1$) :

$$s(t) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right] \text{ exprimée en Volts}$$

K est le gain statique du système ; prenons $K = 10$

z est le facteur d'amortissement du système ; prenons $z = 0,2$. (sans dimension)

ω_n est la pulsation propre non amortie du système ; prenons $\omega_n = 10$ rd/s.

φ est le déphasage : $\varphi = -101,53^\circ$

La signification physique de ces diverses grandeurs sera explicitée dans le cours d'asservissements.



Nous verrons au § 4-3-3 que : $\varphi = \arctg\left(\frac{-\sqrt{1-z^2}}{-z}\right)$; $\cos \varphi = -z$; $\sin \varphi = -\sqrt{1-z^2}$

φ est donc situé dans le troisième quadrant. Dans notre cas : $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-0,2^2}}{0,2}\right) = 78,46^\circ \pm k\pi$

Les signes du sinus et du cosinus permettent la détermination de $\varphi = 78,46-180 = -101,53^\circ = -1,77$ rd

Conséquence: le tracé sur micro ordinateur ou sur calculatrice impose l'écriture complète de φ :

$$\varphi = \left[\arctg\left(\frac{\sqrt{1-0,2^2}}{0,2}\right) - \pi \right]$$

Dans ce cas, une solution plus élégante consiste à remplacer $\sin(x - \pi)$ par $-\sin(x)$ dans l'expression de $s(t)$. On obtient la formule suivante qui utilise la détermination naturelle de la fonction Arctg et qui peut donc se programmer directement :

$$s(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right] \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-0,2^2}}{0,2}\right)$$

Essayons maintenant d'interpréter intuitivement la fonction $s(t)$: En négligeant le facteur K, on peut la mettre sous la forme simplifiée : $s_s(t) = 1 + Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_p t + \varphi)$ qui se comporte globalement comme : $e^{-\alpha t} \sin t$. Cette dernière est une sinusoïde encadrée par deux exponentielles qui convergent vers l'axe des temps.

La forme globale de $s(t)$ sera donc une sinusoïde amortie autour de la droite $y = K$.

Etudions cette courbe pour $t > 0$:

Calcul de la dérivée $s'(t)$: $s'(t) = \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right]$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right]$$

forme $A(u.v)' = A(u.v' + u'v)$ avec : $\frac{d}{dt}(e^{-z\omega_n t}) = -z\omega_n e^{-z\omega_n t}$

et : $\frac{d}{dt} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) = \sqrt{1-z^2} \omega_n \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi)$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left[-z\omega_n e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + \sqrt{1-z^2} \omega_n e^{-z\omega_n t} \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right]$$

$$= \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[-z \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + \sqrt{1-z^2} \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right]$$

En développant le cosinus et le sinus, il vient :

$$= \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[-z \left(\sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \cos(\varphi) + \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \sin(\varphi) \right) + \sqrt{1-z^2} \left(\cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \cos(\varphi) - \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \sin(\varphi) \right) \right]$$

on sait que : $\cos \varphi = -z$; $\sin \varphi = -\sqrt{1-z^2}$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[-z \left(-z \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) - \sqrt{1-z^2} \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \right) + \sqrt{1-z^2} \left(-z \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) + \sqrt{1-z^2} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \right) \right]$$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[\cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) (z\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-z^2}) + \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) (1-z^2 + z^2) \right]$$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[\sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \right]$$

Cette dérivée évolue comme un sinus : elle est donc périodiquement nulle. La courbe $s(t)$ va connaître une succession de maxima et de minima relatifs.

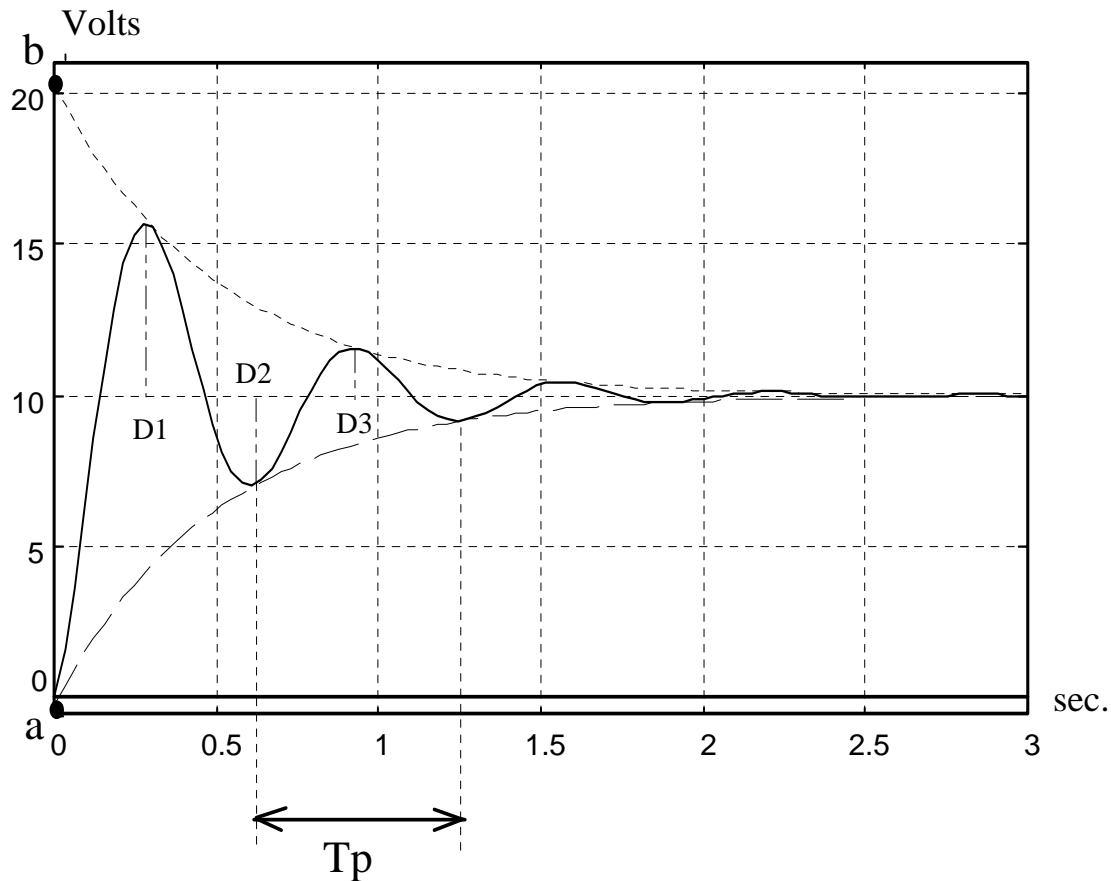
La pente à l'origine est $s'(0) = 0$ Ceci est une particularité très importante qui permet dans certains cas de différentier la réponse d'un système du second ordre de celle d'un système du premier ordre dont la pente à l'origine n'est jamais nulle (voir § 1-3-4).

- La valeur de $s(t)$ en zéro est :

$$s(0) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\varphi) \right] = K \left[1 - \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}} \right] = 0 \quad \text{avec : } \varphi = \arcsin(-\sqrt{1-z^2})$$

- $s(t)$ tend, pour t infini, vers : $s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right] = K$,

l'exponentielle tendant vers zéro.



$$\text{Fig.1-13: } s(t) = 10 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-0,2^2}} e^{-2t} \sin \left(10\sqrt{1-0,2^2} t + \arctg \left(\frac{\sqrt{1-0,2^2}}{0,2} \right) \right) \right]$$

- Cette sinusoïde est encadrée par deux exponentielles :

* L'une décroissante d'équation : $y_1(t) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \right]$ qui coupe l'axe vertical en :

$$y_1(0) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right] \text{ et qui tend vers : } y_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \right] = K$$

Dans notre exemple, elle coupe l'axe vertical en un point $b = y_1(0) = 10 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-0,2^2}} \right] = 20,2$

et tend vers l'horizontale de hauteur $K=10$.

* L'autre croissante d'équation : $y_2(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \right]$ qui coupe l'axe vertical en :

$$y_2(0) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right] \text{ et qui tend vers : } y_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \right] = K$$

Dans notre exemple, elle coupe l'axe vertical en un point $a = y_2(0) = 10 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-0,2^2}} \right] = -0,2$
(on remarque que a est différent de zéro) et tend vers la même horizontale de hauteur $K=10$.

La pulsation de la réponse est : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$ appelée fréquence propre amortie.

Sa période est : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$ appelée période propre.

Amortissement entre deux vibrations consécutives : C'est le rapport entre les amplitudes successives des maximums que l'on appelle δ : décrétement logarithmique.

$$\delta = \frac{\frac{e^{-z\omega_n(t+T_p)}}{\sqrt{1-z^2}} \sin[\sqrt{1-z^2} \omega_n(t+T_p) + \varphi]}{\frac{e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin[\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi]}$$

Le dénominateur est l'amplitude à un temps t et le numérateur est l'amplitude une période plus tard.

La période étant T_p : $\sin(\omega_n t + \varphi) = \sin(\omega_n(t+T_p) + \varphi)$

$$\Rightarrow \delta = \frac{e^{-z\omega_n(t+T_p)}}{e^{-z\omega_n t}} = e^{z\omega_n T_p} \quad \text{avec : } T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$$

Finalement:

$$\delta = e^{-\frac{2\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

La connaissance du décrétement permet de déterminer expérimentalement z en mesurant la hauteur des pics successifs sur une courbe enregistrée du type de celle représentée Fig.1-13

Détermination des dépassements : Les dépassements successifs sont notés $D1, D2, D3$, etc. (voir Fig.1-13). Ils correspondent à la valeur des pics positifs ou négatifs par rapport à la valeur obtenue en régime définitif (10 Volts dans notre cas). En ces points, la dérivée s'annule et change de signe.

Nous avons montré que : $s'(t) = \frac{\omega_n e^{-z\omega_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \left[\sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t) \right]$

Cette fonction s'annule pour les valeurs de $t = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} \quad (k \in \mathbb{Z})$

En ces points, la fonction $s(t)$ prend les valeurs : (ne pas confondre le gain K et k entier quelconque)

$$s(t) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \sin(k\pi + \varphi) \right] = K \left[1 + (-1)^{k+1} \left(\frac{e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\varphi) \right) \right] = K \left[(-1)^k e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}} \right]$$

La valeur absolue des dépassements successifs est : $D_k(z) = e^{-\frac{k\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$

La figure 1-14 représente la valeur des trois premiers dépassements (D1, D2, D3) en fonction de z . Le dépassement est exprimé par rapport à la valeur obtenue en régime définitif : un dépassement de 1 signifie que le dépassement est de 100% de la valeur finale. Les axes sont gradués en coordonnées logarithmiques pour faciliter la lecture.

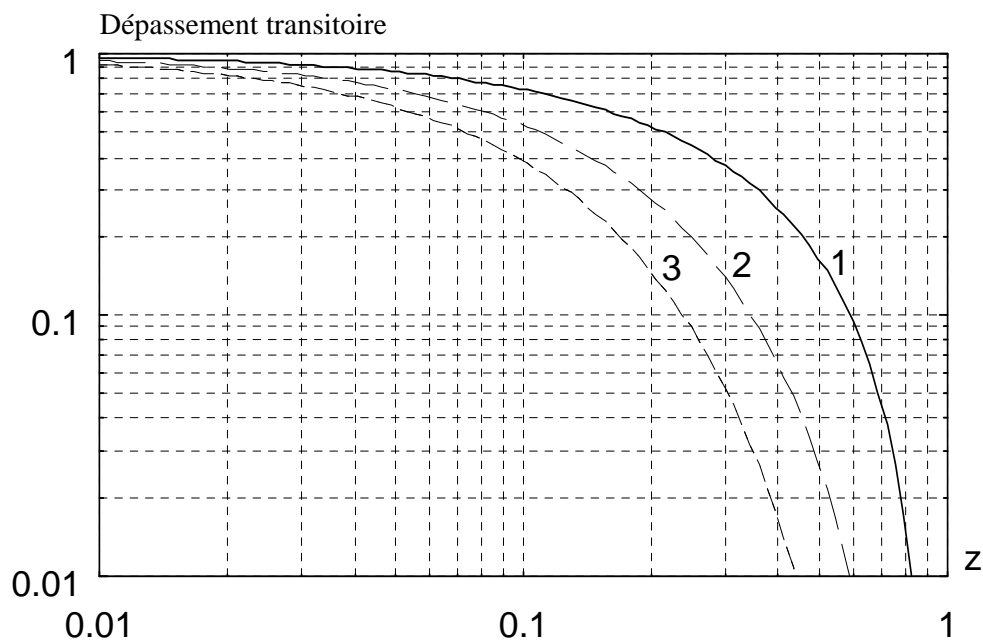


Fig.1-14: Dépassements successifs.

Chapitre 2

LES NOMBRES COMPLEXES

«les racines des mots sont-elles carrées?»

Eugène Ionesco

2-1 DEFINITIONS ET PROPRIETES.

Définition.

L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ des couples de réels, muni de deux lois notées comme l'addition et la multiplication. Cet ensemble a été construit de telle manière que tout élément possède au moins une racine carrée (alors que ce n'est pas le cas dans \mathbf{R}). L'ensemble des complexes se note \mathbf{C} .

Forme algébrique.

En pratique, un nombre complexe s'écrit comme $z = a + ib$ avec a et b Réels et i tel que $i^2 = -1$. Le nombre complexe i est souvent noté j par les physiciens afin d'éviter toute confusion avec l'intensité d'un courant. C'est cette dernière notation que nous adopterons pour la suite.

Partie réelle et partie imaginaire.

a s'appelle la partie réelle et b la partie imaginaire du nombre complexe z . Si b est nul, z est un réel et si a est nul, z est un imaginaire pur.

Addition des nombres complexes.

Sous forme algébrique, on effectuera indépendamment la somme des parties réelles et celle des parties imaginaires en mettant j en facteur.

Ainsi: $z + z' = (a + jb) + (a' + jb') = (a + a') + j(b + b')$

Multiplication des nombres complexes.

Toujours sous forme algébrique, celle-ci s'effectue comme dans \mathbf{R} en utilisant la propriété fondamentale : $j^2 = -1$.

Par exemple : $z \cdot z' = (a + jb) \cdot (a' + jb') = (aa' + ajb' + a'jb + j^2bb') = (aa' - bb') + j(a'b + ab')$

On peut remarquer que : $j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j$ et que : $j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1)^2 = 1$

Complexes conjugués.

Deux nombres complexes conjugués ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées. Le conjugué de $z = a + jb$ est noté \bar{z} , avec: $\bar{z} = a - jb$

On vérifie facilement que :

$$\begin{array}{l} \overline{z\bar{z}} = a^2 + b^2 \\ z + \bar{z} = 2a \end{array}$$

Egalité de deux complexes.

$z = a + jb$ est égal à $z' = a' + jb'$ si et seulement si: $a = a'$ et $b = b'$

2-2 REPRESENTATION GRAPHIQUE.

On peut représenter tout nombre complexe dans un plan orthonormé par un point M de coordonnées (a,b) ou par un vecteur OM de coordonnées (a,b) .

M est l'**image** de z et z est l'**affixe** de M .

Un nombre complexe z et son conjugué sont représentés sur la figure 2-1. On remarque que le conjugué de z à pour image le symétrique M' de M par rapport à l'axe horizontal.

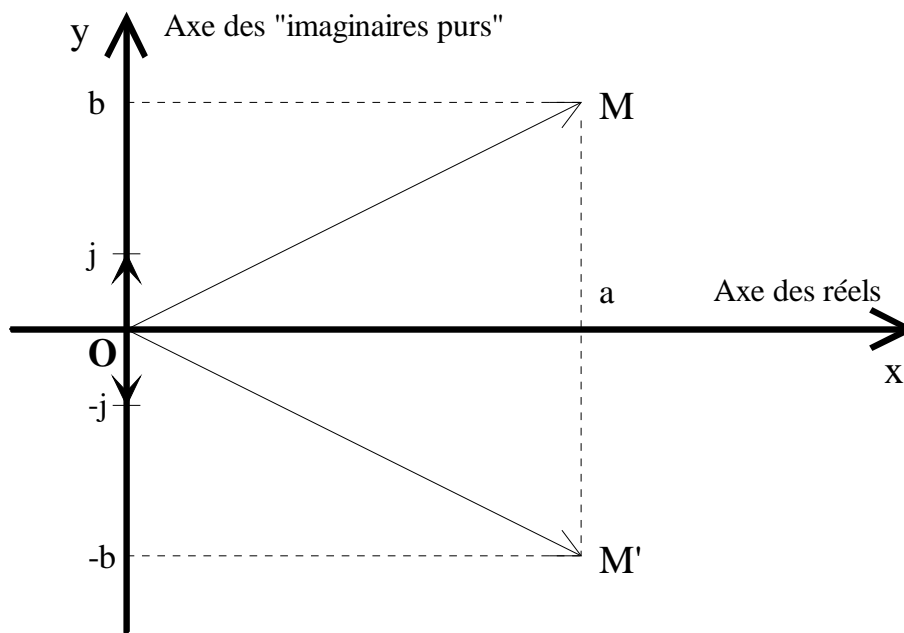


Fig. 2-1

Le plan (O,x,y) est appelé plan complexe.

L'axe des x est appelé axe des réels.

L'axe des y est appelé axe des imaginaires purs.

Le nombre i (ou j) étant un imaginaire pur, il est représenté par un vecteur unitaire et positif porté par l'axe y des imaginaires purs. Le nombre $-i$ (ou $-j$) est également un vecteur unitaire porté par y mais négatif (on remarque au passage que $-j$ est le conjugué de j).

Le nombre $2i$ (ou $2j$) serait représenté par un vecteur également porté par y mais de longueur 2 fois l'unité.

Somme de deux nombres dans le plan complexe.

Soient deux nombres complexes z et z' d'images M et M' . L'image M'' de la somme $z'' = z + z'$ est la somme vectorielle des images M et M' . (Voir Fig.2-2)

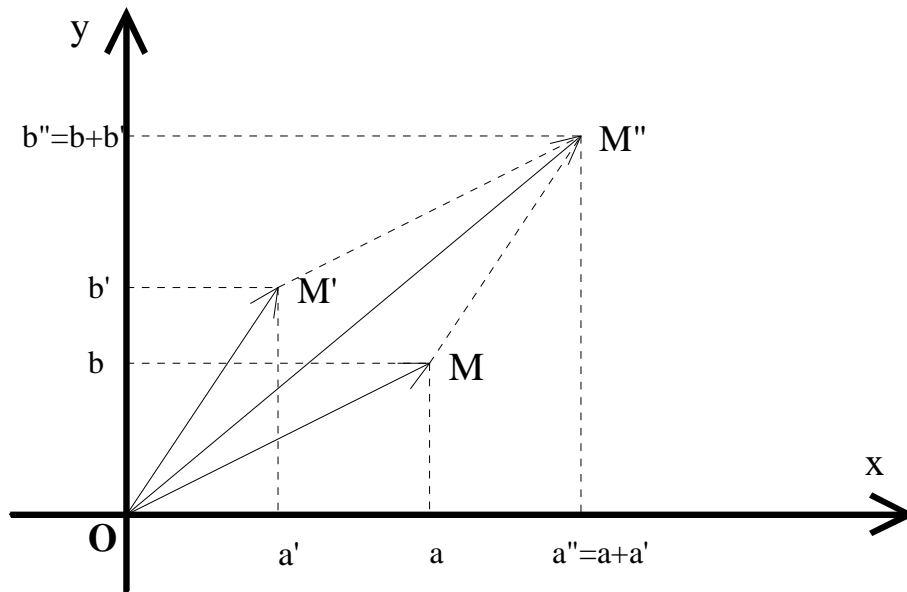


Fig. 2-2

2-3 FORME TRIGONOMETRIQUE.

Une autre manière de représenter les nombres complexes est la forme trigonométrique. Celle-ci s'obtient en considérant l'image M du nombre z dans le plan complexe et en exprimant ses coordonnées polaires. (voir Fig.2-3.)

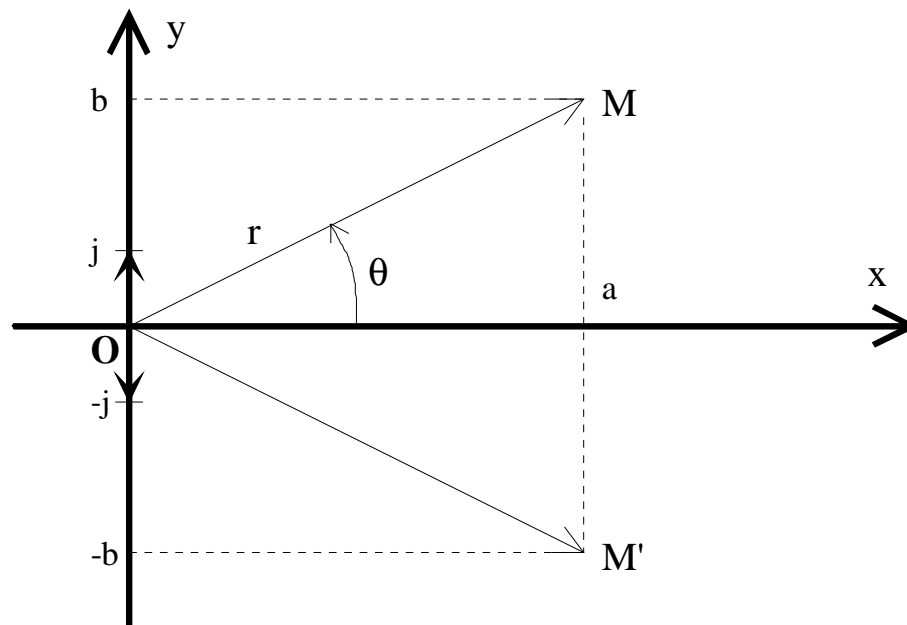


Fig.2-3

On appelle **module** du nombre complexe z la norme du vecteur image \vec{OM}

On appelle **argument** de z l'angle polaire du vecteur image \vec{OM}

Le module est usuellement noté r ou ρ et l'argument est noté θ

Les relations entre les coordonnées polaires et cartésiennes sont simples :

$$a = r \cos \theta \quad ; \quad b = r \sin \theta$$

En reprenant la forme algébrique : $z = a + jb$ et en remplaçant a et b , il vient :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

ou: $z = [r, \theta]$

On remarque que : $j = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ et que : $-j = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

La forme trigonométrique est bien adaptée au calcul des produits et des puissances.

Produit de nombres complexes.

Soit le produit $z'' = zz'$ avec : $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$
développons cette expression :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos \theta + j \sin \theta) \cdot r'(\cos \theta' + j \sin \theta') \\ &= r \cdot r' [(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + j(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \end{aligned}$$

En utilisant les formules d'addition trigonométriques : (voir au chapitre 2-4)

$$(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = \cos(a + b)$$

$$(\cos a \sin b + \sin a \cos b) = \sin(a + b)$$

Il vient :

$$zz' = r \cdot r' [\cos(\theta + \theta') + j \sin(\theta + \theta')] \quad \text{ou alors :} \quad z'' = [r'', \theta''] = [r \cdot r', \theta + \theta']$$

Le produit de deux nombres complexes a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.

$$[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [r \cdot r', \theta + \theta']$$

REMARQUE: La multiplication d'un nombre par j équivaut à une rotation de $+\frac{\pi}{2}$

Division de nombres complexes.

On montre que la division de deux nombres complexes z et z' (avec z' non nul) donne :

$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

L'inversion d'un nombre complexe s'obtient en remplaçant z par 1 dans la formule précédente.

$$\frac{1}{z'} = \frac{[1, 0]}{[r', \theta']} = \left[\frac{1}{r'}, -\theta' \right]$$

Puissances de nombres complexes.

Elévation au carré d'un nombre complexe :

$$z^2 = z \cdot z = [r, \theta] \cdot [r, \theta] = [r^2, 2\theta]$$

En généralisant ce résultat, on obtient la formule de Moivre : $z^n = [r^n, n\theta]$ pour n entier.
qui s'écrit aussi :

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

2-4 NOTATION EXPONENTIELLE.

En remarquant l'analogie de comportement entre la forme trigonométrique d'un nombre complexe et une fonction exponentielle, on adopte la notation suivante : $\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$

La forme exponentielle d'un nombre complexe est donc : $z = r \cdot e^{j\theta}$

On retrouve les résultats précédents soit :

$$z \cdot z' = (r \cdot e^{j\theta}) (r' \cdot e^{j\theta'}) = r \cdot r' \cdot e^{j(\theta + \theta')}$$

$$z^n = (r e^{j\theta})^n = r^n \cdot e^{jn\theta}$$

Formules d'Euler.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

Formules de trigonométrie.

La notation exponentielle, qui est simple à mémoriser, permet de retrouver les formules d'addition trigonométriques en écrivant : (avec a et b réels)

$$e^{ja} \cdot e^{jb} = e^{j(a+b)} \Leftrightarrow (\cos a + j \sin a)(\cos b + j \sin b) = \cos(a+b) + j \sin(a+b)$$

$$\text{Soit: } (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + j(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = \cos(a+b) + j \sin(a+b)$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, il vient :

$$(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = \cos(a+b) \quad (2.1)$$

$$(\sin a \cos b + \sin b \cos a) = \sin(a+b) \quad (2-2)$$

Pour les deux autres formules, on écrit :

$$e^{ja} \cdot e^{-jb} = e^{j(a-b)} \Leftrightarrow (\cos a + j \sin a)(\cos b - j \sin b) = \cos(a-b) + j \sin(a-b)$$

$$\text{Soit: } (\cos a \cos b + \sin a \sin b) + j(\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \cos(a-b) + j \sin(a-b)$$

En identifiant, il vient :

$$(\cos a \cos b + \sin a \sin b) = \cos(a-b) \quad (2-3)$$

$$(\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \sin(a-b) \quad (2-4)$$

Respectivement en additionnant (2-1) et (2-3), en soustrayant (2-1) et (2-3), et en additionnant (2-2) et (2-4), on retrouve les formules transformant un produit en somme.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad (2-5)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad (2-6)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \quad (2-7)$$

2-5 RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE.

Le passage en complexes permet de factoriser un polynôme d'ordre quelconque en produit de polynômes du premier ordre (voir § 3-1-1) et en particulier le trinôme du second degré (voir § 3-1-2).

Considérons l'équation du second degré la plus générale : $ax^2 + bx + c = 0$
 a, b et c étant réels. Suivant le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, cette équation admet une, deux ou aucune racine dans les réels. Ce dernier cas est illustré par l'équation : $x^2 + 1 = 0$
 qui implique que : $x^2 = -1$ et donc que : $x = \sqrt{-1}$. un tel nombre n'existe pas dans l'ensemble des réels, ce qui entraîne que cette équation ne possède pas de solution. Par contre, le nombre complexe j dont le carré est justement -1 est une solution de cette équation. De nombreux exemples de factorisation dans les complexes sont traités §3.

2-6 TRACE D'UNE COURBE DANS LE PLAN COMPLEXE.

2-6-1 LIEU DE NYQUIST D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE.

Ce problème se rencontre en asservissements lorsque l'on désire tracer le lieu de Nyquist qui est la représentation dans le plan complexe de la réponse en fréquences d'un système donné. On se propose de tracer le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre dont la réponse en fréquence

s'écrit, la variable étant ω positive ou nul : $H(j\omega) = \frac{K}{1 + Tj\omega}$

$H(j\omega)$ est une fonction complexe que l'on peut aussi écrire : $H(j\omega) = x + jy$

Mettons la sous cette forme en multipliant le dénominateur par son conjugué :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + Tj\omega} = \frac{K(1 - Tj\omega)}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)} = \frac{K(1 - Tj\omega)}{(1 + T^2\omega^2)} = \frac{K}{(1 + T^2\omega^2)} + j \frac{-KT\omega}{(1 + T^2\omega^2)}$$

$$\text{En identifiant, on obtient : } x = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = \frac{K}{(1 + T^2\omega^2)} > 0 \quad (2-8)$$

$$\text{et : } y = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = \frac{-KT\omega}{(1 + T^2\omega^2)} < 0 \quad (2-9)$$

Exprimons x en fonction de y :

$$(2-1) \Rightarrow (1 + T^2\omega^2) = \frac{K}{x} \Rightarrow T^2\omega^2 = \frac{K - x}{x} \Rightarrow T\omega = \sqrt{\frac{K - x}{x}}$$

en reportant dans (2-9) :

$$y = \frac{-K \sqrt{\frac{K - x}{x}}}{\frac{K}{x}} = -\sqrt{x(K - x)} \quad (2-10)$$

En élevant (2-10) au carré, il vient :

$$y^2 = x(K - x) = xK - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - xK = 0$$

$$\text{En remarquant que : } (x^2 - xK) = \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 - \frac{K^2}{4}$$

$$\text{On écrit finalement : } \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4} \quad (2-11)$$

Cette équation est du type $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ qui est celle d'un cercle de rayon r et de centre situé en : (x_0, y_0)

Dans notre cas, il s'agit donc d'un cercle de rayon $K/2$, de centre situé en $(K/2, 0)$ et limité au quadrant $x > 0$ et $y < 0$.

Ce cercle est parcouru dans le sens horaire, correspondant au sens croissant des.

La courbe tend vers le point $(0,0)$ lorsque ω est infini. (voir Fig.2-4)

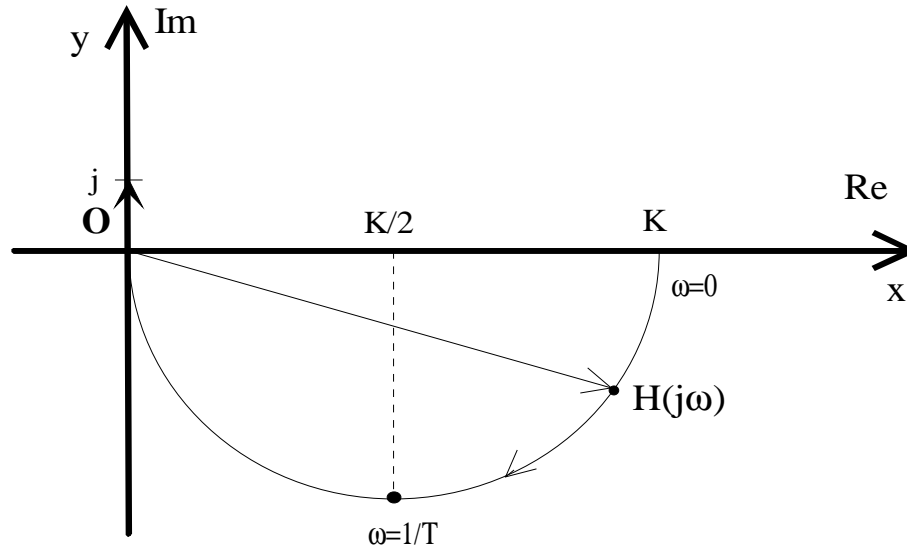


Fig.2-4.

2-6-2 LIEU DE NYQUIST D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE.

La réponse en fréquence d'un système du second ordre s'écrit :
$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2z\omega}{\omega_n}\right)}$$

K et z positifs, ω positif ou nul.

H est une fonction complexe dont le module est :
$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2z\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

et l'argument est :
$$\text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arctg}\left(\frac{\frac{2z\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\text{Arctg}\left(\frac{2z\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

On pose usuellement : $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ pulsation réduite et il vient :

$$A(u) = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2zu)^2}} \quad \text{et} \quad \phi(u) = -\text{Arctg}\left(\frac{2zu}{1 - u^2}\right)$$

L'argument (appelé phase en asservissements) a été étudié au § 1-4-2.

Etude du module : recherche d'un extremum : $A(u)$ est de la forme $\frac{K}{\sqrt{v}}$.

$$\frac{dA(u)}{du} = \frac{d}{du} \left(\frac{K}{\sqrt{v}} \right) = K \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \right) = -\frac{K}{2} \frac{1}{(v)^{3/2}} \frac{d}{du}(v)$$

avec: $v = (1-u^2)^2 + (2zu)^2$ toujours positif. Le signe de $\frac{dA(u)}{du}$ est le même que celui de $\frac{d}{du}(v)$

$$\frac{d}{du}(v) = \frac{d}{du} \left[(1-u^2)^2 + (2zu)^2 \right] = -2(1-u^2)2u + 2.2zu.2z = 4u(2z^2 - 1 + u^2)$$

cette expression possède deux zéros :

* $u = 0$ correspondant à $\omega = 0$ l'amplitude est $A(0) = K$

* $u = \sqrt{1-2z^2}$ maximum de l'amplitude existant lorsque $2z^2 \leq 1 \Rightarrow z \leq 0,7$

La pulsation correspondant à ce maximum s'appelle pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$

La valeur du maximum est : $A(\omega_r) = \frac{K}{\sqrt{(1-1+2z^2)^2 + (2z\sqrt{1-2z^2})^2}} = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$

Finalement, H est une fonction complexe dont l'argument évolue de 0° à -180° pendant que le module évolue de K à 0 en passant par un maximum $\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$ si $z \leq 0,7$.

Pour $z = 0,43$ $K = 10$ et $\omega_n = 10$ on obtient le tracé suivant :

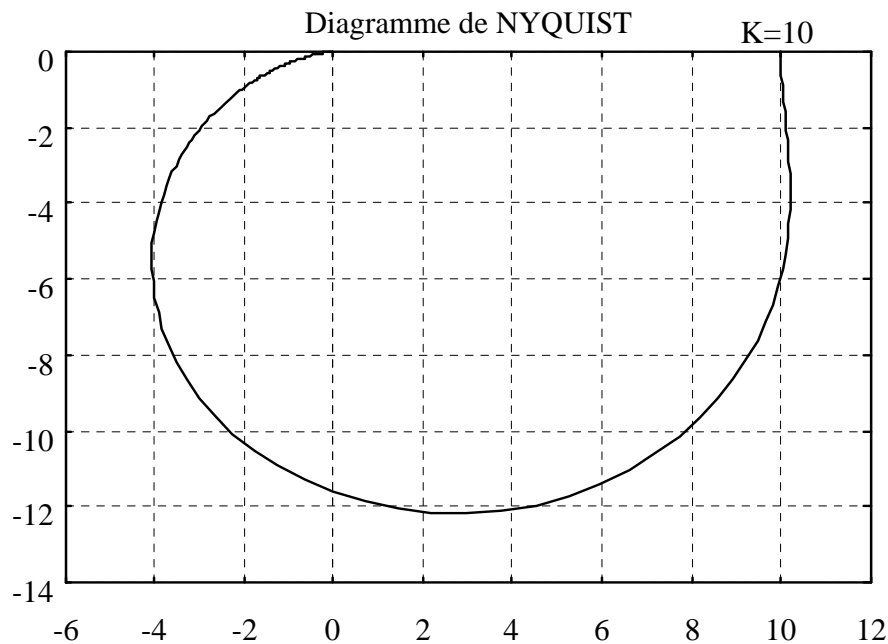


Fig.2-5.

Chapitre 3

POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

«Oui ! il est possible d'initier l'enfant au calcul mental au moyen de calculatrices électroniques : deux calculatrices plus trois calculatrices égal cinq calculatrices.»

Philippe Geluck

3-1 POLYNOMES.

3-1-1 FACTORISATION.

Un polynôme est usuellement représenté par la fonction associée, ordonnée suivant les puissances croissantes.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$P(x)$ est ici un polynôme de degré n , de la variable complexe x .

* Les coefficients sont, pour ce qui nous concerne, réels.

* Tout x , tel que $p(x) = 0$ est appelé **zéro du polynôme**.

Décomposition d'un polynôme.

soit le polynôme de degré n

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

admettant r zéros réels et s couples de zéros complexes conjugués.

$P(x)$ peut alors s'écrire d'une manière unique sous sa forme factorisée :

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} [(x - z_1)(x - \bar{z}_1)]^{\beta_1} \dots [(x - z_s)(x - \bar{z}_s)]^{\beta_s}.$$

conséquence: une équation algébrique à coefficients réels $P(x) = 0$ admet, dans le cas le plus général,

- * des racines réelles x_1, x_2, \dots, x_r d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$
on dit que x_1 est un zéro d'ordre α_1
- * des couples de racines complexes $(z_1, \bar{z}_1), (z_2, \bar{z}_2), \dots, (z_s, \bar{z}_s)$ d'ordres respectifs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

La factorisation peut s'effectuer dans les réels en utilisant le fait que :

$$(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = [x - (a_1 + jb_1)][x - (a_1 - jb_1)] = [(x - a_1)^2 + b_1^2]$$

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{\beta_1} \dots [(x - a_s)^2 + b_s^2]^{\beta_s}.$$

Cette factorisation est également unique, mais il apparaît des termes du second ordre.

Exemple: considérons le polynôme du quatrième ordre $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

Les zéros réels sont : $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ chacun d'ordre 1

Les zéros complexes sont $z_1 = 2j = (a + jb)$; $\bar{z}_1 = -2j = (a - jb)$ conjugués.

La factorisation dans les complexes donne un produit de termes du premier ordre :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - z)(x - \bar{z}) = (x - 1)(x + 1)(x - 2j)(x + 2j)$$

La factorisation dans les réels donne un produit de termes du premier et du second ordre :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + b^2) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 4)$$

ATTENTION: la factorisation n'est possible que si le coefficient du terme du plus haut degré est égal à 1 (ce qui était le cas ici). Dans le cas contraire, il suffit de mettre ce coefficient lui-même en facteur.

3-1-2 UN POLYNOME PARTICULIER : LE TRINOME DU SECOND DEGRE.

Il est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels

les zéros de $P(x)$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

La résolution est très classique et dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Il y a trois cas :

* **cas 1 :** discriminant positif, deux racines réelles distinctes.

$$\Delta > 0 \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

La factorisation donne : (ne pas oublier le facteur a)

$$P(x) = a \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

* **cas 2 :** discriminant nul, une racine réelle double. $\Delta = 0 \quad x = \frac{-b}{2a}$

La factorisation donne : $P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$

* **cas 3 :** discriminant négatif, deux racines complexes conjuguées.

$$\Delta < 0 \quad x_1 = \frac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \overline{x_1} = \frac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La factorisation n'est plus possible dans les réels. En complexes on obtient :

$$P(x) = a \left(x + \frac{b + j\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - j\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right)$$

Exemple 1 : Considérons le trinôme suivant : $F(p) = 1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2$

C'est un polynôme du second ordre en p (p étant la variable de Laplace) qui se rencontre souvent en asservissements. Les coefficients sont tous réels et positifs pour ce qui nous concerne. On distingue trois cas :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4z^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4(z^2 - 1)}{\omega_n^2}$$

Cas 1 : Discriminant positif, deux racines réelles :

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-2z}{\omega_n} + \frac{2\sqrt{z^2 - 1}}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1}$$

$$p_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-2z}{\omega_n} - \frac{2\sqrt{z^2 - 1}}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1}$$

Le trinôme peut maintenant s'écrire :

$$F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (p + z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1})(p + z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1})$$

On retrouve facilement l'expression d'origine de $F(p)$ en développant l'équation précédente.

On rencontre une autre forme de $F(p)$ en asservissements qui permet de faire apparaître les grandeurs $T1$ et $T2$ qui ont un sens physique. Reprenons la forme factorisée de $F(p)$ et transformons-la de la manière suivante :

$$F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[(z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1}) \left(\frac{p + z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1}}{(z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right) \cdot (z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1}) \left(\frac{p + z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1}}{(z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right) \right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[(z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1}) (z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1}) \left(1 + \frac{p}{(z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right) \left(1 + \frac{p}{(z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right) \right]$$

En simplifiant, il vient :

$$F(p) = \left(1 + \frac{p}{(z\omega_n + \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right) \left(1 + \frac{p}{(z\omega_n - \omega_n\sqrt{z^2 - 1})} \right)$$

et finalement :

$$F(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \quad \text{avec:} \quad T_1 = \frac{1}{(z\omega_n + \omega_n \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et:} \quad T_2 = \frac{1}{(z\omega_n - \omega_n \sqrt{z^2 - 1})}$$

Cette forme n'est valide que si $z > 1$

Cas 2 : Discriminant nul, une racine double :

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{-2z}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -z\omega_n = -\omega_n$$

$$\text{Le trinôme peut maintenant s'écrire : } F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (p + z\omega_n)^2 = \frac{1}{\omega_n^2} (p + \omega_n)^2$$

Comme dans le cas 1, on veut faire apparaître une autre forme de $F(p)$. Reprenons sa forme factorisée et transformons-la de la manière suivante :

$$F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[(z\omega_n)^2 \left(\frac{(p + z\omega_n)}{(z\omega_n)} \right)^2 \right] = z^2 \left(1 + \frac{p}{z\omega_n} \right)^2 = \left(1 + \frac{p}{z\omega_n} \right)^2$$

finalement:

$$F(p) = (1 + Tp)^2 \quad \text{avec:} \quad T = \frac{1}{(z\omega_n)}$$

Cas 3 : Discriminant négatif, deux racines complexes :

$$p_1 = \frac{-b + j\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-2z}{\omega_n} + \frac{2j\sqrt{1-z^2}}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -z\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-z^2}$$

$$p_2 = \frac{-b - j\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-2z}{\omega_n} - \frac{2j\sqrt{1-z^2}}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-z^2}$$

Le trinôme peut maintenant s'écrire :

$$F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (p + z\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-z^2})(p + z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-z^2})$$

Encore une fois, on désire faire apparaître une forme différente de $F(p)$ qui sera exploitée dans le cours d'asservissements.

On pose : $a = z\omega_n$ et $b = \omega_n\sqrt{1-z^2} = \omega$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (p+a+jb)(p+a-jb)$$

$$\text{Développons: } F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} (p^2 + ap - jbp + ap + a^2 - jab + jbp + jab + b^2) = \frac{1}{\omega_n^2} [(p+a)^2 + b^2]$$

Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{\omega_n^2} \left[(p+z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]$$

Exemple 2 : Détermination de la pulsation de coupure à 3dB d'un système du second ordre.

Nos avons vu en 2-6-2 que, pour un système du second ordre, l'amplitude s'écrivait :

$$A(u) = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}} \quad \text{pour } u = 0 \text{ (amplitude statique), } A = K$$

Le gain en décibels est défini par : $AdB = 20\log(A)$

$$AdB = 20\log(A(u)) = 20\log\left[\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2zu)^2}}\right] = 20\log(K) - 10\log[(1-u^2)^2 + (2zu)^2]$$

On se propose de déterminer la pulsation de coupure à 3dB, c'est à dire la pulsation pour laquelle le signal est affaibli de 3dB par rapport à l'amplitude statique.

Amplitude statique : $KdB = 20\log(K)$

Amplitude "limite" : $AdB_{lim} = KdB - 3dB = 20\log(K) - 3 = 20\log(K) - 10\log[(1-u^2)^2 + (2zu)^2]$

$$\Rightarrow 10\log[(1-u^2)^2 + (2zu)^2] = 3$$

$$\Rightarrow [(1-u^2)^2 + (2zu)^2] = 10^{0.3} = 2$$

$$\Rightarrow 1 - 2u^2 + u^4 + 4z^2u^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow u^4 + (4z^2 - 2)u^2 - 1 = 0$$

En posant $u^2 = X$, on obtient le trinôme du second degré suivant :

$$X^2 + (4z^2 - 2)X - 1 = 0$$

$\Delta = 4(2z^2 - 1)^2 + 4 = 4(4z^4 - 2z^2 + 2)$ qui est un trinôme toujours positif car son déterminant est égal à $\Delta' = -9$, ce qui signifie que les racines sont complexes. z étant réel, ce trinôme ne s'annule jamais et reste positif.

Le premier trinôme possède donc deux racines réelles

$$X_1 = \frac{2 - 4z^2 + 2\sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}}{2} = (1 - 2z^2) + \sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}$$

$$X_2 = \frac{2 - 4z^2 - 2\sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}}{2} = (1 - 2z^2) - \sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}$$

Racines de la forme : $\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}$ et $\alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}$

En remarquant que : $\sqrt{1 + \alpha^2} > \alpha \quad \forall \alpha$ et sachant que l'on cherche une racine positive $u^2 = X$, la racine est :

$$u^2 = X_1 = (1 - 2z^2) + \sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}$$

et finalement :

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{(1 - 2z^2) + \sqrt{1 + (1 - 2z^2)^2}}$$

3-2 FRACTIONS RATIONNELLES.

3-2-1 DEFINITIONS.

* On appelle fraction rationnelle tout couple (N, D) de polynômes noté $\frac{N(x)}{D(x)}$ $D(x) \neq 0$
 $N(x)$ est le polynôme numérateur et $D(x)$ est le polynôme dénominateur.

* On appelle pôle de cette fraction toute racine de l'équation $D(x) = 0$ c.a.d. tout zéro de $D(x)$.

Exemple: la fraction rationnelle $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{3 + 2x}{x^2(x + 1)}$ possède un pôle $x = 0$ d'ordre 2 et un pôle $x = -1$ d'ordre 1

* Toute fraction rationnelle peut se décomposer en éléments simples.

La décomposition dans les complexes donnera uniquement des éléments simples de première espèce du type $\frac{A}{(x - x_i)^n}$ avec A : coefficient réel et x_i : pôle complexe d'ordre n de la fraction.

La décomposition dans les réels donnera des éléments simples de première espèce et des éléments simples de deuxième espèce du type : $\frac{Ax + B}{[(x + a)^2 + b^2]^n}$ avec: A et B coefficients réels et $(a + jb)$, $(a - jb)$ pôles complexes conjugués d'ordre n .

La pratique de la transformation de Laplace impose la connaissance des méthodes de décomposition de fractions rationnelles en éléments simples. En effet, les fonctions de transfert des servomécanismes se présentent sous la forme de fractions rationnelles en p .

3-2-2 PRATIQUE DE LA DECOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

La méthode est la suivante :

- 1) factorisation de $D(x)$,
- 2) décomposition en somme de fractions rationnelles,
- 3) détermination des coefficients inconnus.

Exemple. soit la fraction : $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$

1) factorisation de $D(x)$: $D(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x-2)(x+2)$

2) décomposition en éléments simples :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)}$$

REMARQUE 1 : dans le cas où le pôle est multiple d'ordre n , les puissances successives doivent apparaître dans la décomposition. Par exemple :

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

REMARQUE 2 : dans le cas où le pôle est complexe, la décomposition dans les réels fait apparaître un terme du second ordre dont le numérateur est du premier ordre en x . Par exemple

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x^2 + 4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)}$$

3) détermination des coefficients inconnus :

Il s'agit ici de déterminer A , B et C . On peut utiliser deux méthodes principales (1 et 2) et deux méthodes annexes (3 et 4).

Méthode principale 1. (déconseillée, car souvent lourde)

On réduit au même dénominateur.

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$= \frac{A(x-2)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-3C)x + (2C-4A-2B)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

On identifie ensuite les numérateurs.

$$(A + B + C)x^2 + (B - 3C)x + (2C - 4A - 2B) = x^2 + 1$$

et on identifie les coefficients, ce qui nous donne un système de trois équations à trois inconnues.

$$\left. \begin{array}{l} (1)A + B + C = 1 \\ (2)B - 3C = 0 \\ (3)2C - 4A - 2B = 1 \end{array} \right\}$$

La résolution est simple et donne : $A = -2/3$; $B = 5/4$; $C = 5/12$

Méthode principale 2 :

Elle consiste à multiplier les deux membres par le dénominateur de la fraction dont on recherche le coefficient et à annuler le terme.

$$\frac{(x-1)N(x)}{D(x)} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A(x-1)}{(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x-2)} + \frac{C(x-1)}{(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+1)}{(x-2)(x+2)} = A + \frac{B(x-1)}{(x-2)} + \frac{C(x-1)}{(x+2)}$$

on fait : $x = 1$, ce qui, les termes en B et en C s'annulant, nous donne immédiatement $A = -2/3$

Même opération pour B :

$$\frac{(x-2)N(x)}{D(x)} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A(x-2)}{(x-1)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)} + \frac{C(x-2)}{(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = B + \frac{A(x-2)}{(x-1)} + \frac{C(x-2)}{(x+2)}$$

on fait $x = 2$, et on obtient $B = 5/4$

Même opération pour C :

$$\frac{(x+2)N(x)}{D(x)} = \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x-1)} + \frac{B(x+2)}{(x-2)} + \frac{C(x+2)}{(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+1)}{(x-2)(x-1)} = C + \frac{A(x+2)}{(x-2)} + \frac{B(x+2)}{(x-2)}$$

on fait $x = -2$, et on obtient $C = 5/12$

Méthode annexe 3 : (efficace mais délicate) Elle ne permet pas, en général, de déterminer tous les coefficients.

On fait tendre x vers l'infini après multiplication par l'un des dénominateurs de la décomposition

$$\frac{(x-1)N(x)}{D(x)} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{(x^2+1)}{(x^2-4)} = \frac{A(x-1)}{(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x-2)} + \frac{C(x-1)}{(x+2)}$$

On trouve $A+B+C = 1$, équation que l'on aurait trouvée également en choisissant un autre dénominateur

Méthode annexe 4 : Elle permet de déterminer un terme.

On donne une valeur numérique à x . Par exemple, connaissant A et B , et choisissant $x = 1$ j'obtiens une équation à une inconnue C .

3-2-3 EXEMPLES.

Tous les exemples développés dans ce chapitre seront utilisés ultérieurement et sont liés à la transformation de Laplace (voir §5). C'est la raison pour laquelle la variable utilisée ne sera plus x mais p , variable de Laplace.

3-2-3-1 Exemple 1 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)}$

Décomposition en éléments simples : $F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+Tp)}$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2.

$$pF(p) = \frac{p}{p(1+Tp)} = \frac{1}{(1+Tp)} = \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{(1+Tp)} = A + \frac{Bp}{(1+Tp)}$$

En posant $p = 0$, il vient immédiatement : $A = 1$

$$(1+Tp)F(p) = \frac{1+Tp}{p(1+Tp)} = \frac{1}{p} = \frac{A(1+Tp)}{p} + \frac{B(1+Tp)}{(1+Tp)} = B + \frac{A(1+Tp)}{p}$$

En posant $p = -1/T$, on trouve $B = -T$

Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)} = \frac{1}{p} - \frac{T}{(1+Tp)}$$

3-2-3-2 Exemple 2 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)}$

Décomposition en éléments simples : $F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(1+Tp)}$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour B et C.

$$p^2 F(p) = \frac{p^2}{p^2(1+Tp)} = \frac{1}{(1+Tp)} = \frac{Ap^2}{p} + \frac{Bp^2}{p^2} + \frac{Cp^2}{(1+Tp)} = Ap + B + \frac{Cp^2}{(1+Tp)}$$

En posant $p = 0$, il vient : $B = 1$

$$(1+Tp)F(p) = \frac{1+Tp}{p^2(1+Tp)} = \frac{1}{p^2} = \frac{A(1+Tp)}{p} + \frac{B(1+Tp)}{p^2} + \frac{C(1+Tp)}{(1+Tp)} = \frac{A(1+Tp)}{p} + \frac{B(1+Tp)}{p^2} + C$$

En posant $p = -1/T$, on trouve $C = T^2$

Pour déterminer A, la méthode 2 étant inadaptée, on utilise la méthode 3 ou 4.

Méthode 3 : on multiplie par p et on fait tendre p vers l'infini.

$$pF(p) = \frac{p}{p^2(1+Tp)} = \frac{1}{p(1+Tp)} = \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{p^2} + \frac{Cp}{(1+Tp)} = A + \frac{B}{p} + \frac{Cp}{(1+Tp)}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p(1+Tp)} \right) = 0 ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{p} \right) = 0 ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Cp}{(1+Tp)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{C}{\frac{1}{p} + T} \right) = \frac{C}{T}$$

ce qui nous donne l'équation : $0 = A + 0 + C/T$

on connaît C, et on trouve $A = -T$

Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)} = \frac{1}{p^2} + \frac{T^2}{(1+Tp)} - \frac{T}{p}$$

3-2-3-3 Exemple 3 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)^2}$

Décomposition en éléments simples : $F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+Tp)} + \frac{C}{(1+Tp)^2}$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour A et C.

$$pF(p) = \frac{p}{p(1+Tp)^2} = \frac{1}{(1+Tp)^2} = \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{(1+Tp)} + \frac{Cp}{(1+Tp)^2} = A + \frac{Bp}{(1+Tp)} + \frac{Cp}{(1+Tp)^2}$$

En posant $p = 0$, il vient : $A = 1$

$$(1+Tp)^2 F(p) = \frac{(1+Tp)^2}{p(1+Tp)^2} = \frac{1}{p} = \frac{A(1+Tp)^2}{p} + \frac{B(1+Tp)^2}{(1+Tp)} + \frac{C(1+Tp)^2}{(1+Tp)^2} = \frac{A(1+Tp)^2}{p} + B(1+Tp) + C$$

En posant $p = -1/T$, on trouve $C = -T$

Pour déterminer B (impossible par la méthode 2), on utilise la méthode 3 ou 4.

Méthode 3 : on multiplie par p et on fait tendre p vers l'infini.

$$pF(p) = \frac{p}{p(1+Tp)^2} = \frac{1}{(1+Tp)^2} = \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{(1+Tp)} + \frac{Cp}{(1+Tp)^2} = A + \frac{B}{(1+Tp)} + \frac{Cp}{(1+Tp)^2}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1+Tp)^2} \right) = 0 ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Bp}{(1+Tp)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{\left(\frac{1}{p} + T \right)} \right) = \frac{B}{T}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Cp}{(1+Tp)^2} \right) = 0$$

ce qui nous donne l'équation : $0 = A + B/T + 0$

on connaît A , et on trouve $B = -AT = -T$

Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{p(1+Tp)^2} = \frac{1}{p} - \frac{T}{(1+Tp)} - \frac{T}{(1+Tp)^2}$$

3-2-3-4 Exemple 4 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)^2}$

$$\text{Décomposition en éléments simples : } F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(1+Tp)} + \frac{D}{(1+Tp)^2}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour B et D .

$$p^2 F(p) = \frac{p^2}{p^2(1+Tp)^2} = \frac{1}{(1+Tp)^2} = \frac{Ap^2}{p} + \frac{Bp^2}{p^2} + \frac{Cp^2}{(1+Tp)} + \frac{Dp^2}{(1+Tp)^2}$$

$$= Ap + B + \frac{Cp^2}{(1+Tp)} + \frac{Dp^2}{(1+Tp)^2}$$

En posant $p = 0$, il vient : $B = 1$

$$(1+Tp)^2 F(p) = \frac{(1+Tp)^2}{p^2(1+Tp)^2} = \frac{1}{p^2} = \frac{A(1+Tp)^2}{p} + \frac{B(1+Tp)^2}{p^2} + \frac{C(1+Tp)^2}{(1+Tp)} + \frac{D(1+Tp)^2}{(1+Tp)^2}$$

$$= \frac{A(1+Tp)^2}{p} + \frac{B(1+Tp)^2}{p^2} + C(1+Tp) + D$$

En posant $p = -1/T$, on trouve $D = T^2$

Pour déterminer A et C (impossible par la méthode 2), on utilise la méthode 3 ou 4.

Méthode 3 : on multiplie par p et on fait tendre p vers l'infini.

$$pF(p) = \frac{p}{p^2(1+Tp)^2} = \frac{1}{p(1+Tp)^2} = \frac{Ap}{p} + \frac{Bp}{p^2} + \frac{Cp}{(1+Tp)} + \frac{Dp}{(1+Tp)^2}$$

$$= A + \frac{B}{p} + \frac{Cp}{(1+Tp)} + \frac{Dp}{(1+Tp)^2}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p(1+Tp)^2} \right) = 0 ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{p} \right) = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Cp}{(1+Tp)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{C}{\left(\frac{1}{p} + T \right)} \right) = \frac{C}{T}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Dp}{(1+Tp)^2} \right) = 0$$

ce qui nous donne l'équation à deux inconnues : $0 = A + 0 + C/T + 0$

Il nous faut une autre équation pour déterminer A et C : méthode 4.

On pose $p=1$ par exemple.

$$F(1) = \frac{1}{(1+T)^2} = A + B + \frac{C}{(1+T)} + \frac{D}{(1+T)^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{(1+T)^2} - B - \frac{C}{(1+T)} - \frac{D}{(1+T)^2}$$

En réduisant au même dénominateur et en donnant leur valeur à B et D :

$$A = \frac{1 - B(1+T)^2 - C(1+T) - D}{(1+T)^2} = \frac{1 - (1+T)^2 - C(1+T) - T^2}{(1+T)^2}$$

$$A = \frac{1 - 1 - 2T - T^2 - C - CT - T^2}{(1+T)^2} = -\frac{2T + 2T^2 - C - CT}{(1+T)^2}$$

On obtient une deuxième équation qui nous donne le système suivant.

$$\left. \begin{array}{l} (1) A = -2T - 2T^2 + C + CT \\ (2) 0 = A + \frac{C}{T} \end{array} \right\}$$

En sortant C de (2), on obtient $C = -AT$

En plongeant ce résultat dans (1), on écrit :

$$A(1+T)^2 = -2T - 2T^2 + AT + AT^2 \quad \Leftrightarrow A(1+T)^2 - AT - AT^2 = -2T - 2T^2$$

Après division des deux membres par $(1+T)$, il vient :

$$A = -2T \quad \text{et} \quad C = -AT = 2T^2$$

Finalement:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(1+Tp)^2} = -\frac{2T}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2T^2}{(1+Tp)} + \frac{T^2}{(1+Tp)^2}$$

3-2-3-5 Exemple 5 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$

$$\text{Décomposition en éléments simples : } F(p) = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{A}{(1+T_1p)} + \frac{B}{(1+T_2p)}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour A et B.

$$(1+T_1p)F(p) = \frac{(1+T_1p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{(1+T_2p)} = \frac{A(1+T_1p)}{(1+T_1p)} + \frac{B(1+T_1p)}{(1+T_2p)} = A + \frac{B(1+T_1p)}{(1+T_2p)}$$

$$\text{En posant } p = \frac{-1}{T_1}, \text{ il vient : } A = \frac{-T_1}{T_1 - T_2}$$

$$(1+T_2p)F(p) = \frac{(1+T_2p)}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{(1+T_1p)} = \frac{A(1+T_2p)}{(1+T_1p)} + \frac{B(1+T_2p)}{(1+T_2p)} = \frac{A(1+T_2p)}{(1+T_1p)} + B$$

F(p) s'écrit donc :

$$F(p) = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{T_2 - T_1} \left[\frac{T_1}{(1+T_1p)} - \frac{T_2}{(1+T_2p)} \right]$$

3-2-3-6 Exemple 6 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$

Décomposition en éléments simples : $F(p) = \frac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+T_1p)} + \frac{C}{(1+T_2p)}$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour A, B et C.

$$pF(p) = \frac{p}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = A + \frac{Bp}{(1+T_1p)} + \frac{Cp}{(1+T_2p)}$$

En posant $p = 0$, il vient : $A = 1$

$$(1+T_1p)F(p) = \frac{(1+T_1p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{p(1+T_2p)} = \frac{A(1+T_1p)}{p} + B + \frac{C(1+T_1p)}{(1+T_2p)}$$

En posant : $p = \frac{-1}{T_1}$ on trouve : $B = \frac{T_1^2}{T_2 - T_1}$

$$(1+T_2p)F(p) = \frac{(1+T_2p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{p(1+T_1p)} = \frac{A(1+T_2p)}{p} + \frac{B(1+T_2p)}{(1+T_1p)} + C$$

En posant : $p = \frac{-1}{T_2}$ on trouve : $C = \frac{-T_2^2}{T_2 - T_1}$

F(p) s'écrit maintenant :

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{T_2 - T_1} \left[\frac{T_1^2}{(1+T_1p)} - \frac{T_2^2}{(1+T_2p)} \right]$$

3-2-3-7 Exemple 7 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$

Décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{1}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(1+T_1p)} + \frac{D}{(1+T_2p)}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour B, C et D.

$$p^2F(p) = \frac{p^2}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)} = \frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = Ap + B + \frac{Cp^2}{(1+T_1p)} + \frac{Dp^2}{(1+T_2p)}$$

En posant $p = 0$, il vient : $B = 1$

$$(1 + T_1 p)F(p) = \frac{(1 + T_1 p)}{p^2 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{1}{p^2 (1 + T_2 p)} = \frac{A(1 + T_1 p)}{p} + \frac{B(1 + T_1 p)}{p^2} + C + \frac{D(1 + T_1 p)}{(1 + T_2 p)}$$

En posant : $p = \frac{-1}{T_1}$ on trouve : $C = \frac{T_1^2}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_1^3}{T_1 - T_2}$

$$(1 + T_2 p)F(p) = \frac{(1 + T_2 p)}{p^2 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{1}{p^2 (1 + T_1 p)} = \frac{A(1 + T_2 p)}{p} + \frac{B(1 + T_2 p)}{p^2} + \frac{C(1 + T_2 p)}{(1 + T_1 p)} + D$$

En posant : $p = \frac{-1}{T_2}$ on trouve : $D = \frac{T_2^3}{T_2 - T_1}$

Pour déterminer A, on utilise la méthode 3 en multipliant $F(p)$ par p et en faisant tendre p vers l'infini.

$$pF(p) = \frac{p}{p^2 (1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{1}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = A + \frac{B}{p} + \frac{Cp}{(1 + T_1 p)} + \frac{Dp}{(1 + T_2 p)}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) = 0 ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{p} \right) = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Cp}{(1 + T_1 p)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{C}{\left(\frac{1}{p} + T_1 \right)} \right) = \frac{C}{T_1} ; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{Dp}{(1 + T_2 p)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{D}{\left(\frac{1}{p} + T_2 \right)} \right) = \frac{D}{T_2}$$

ce qui nous donne l'équation à une inconnue : $0 = A + \frac{C}{T_1} + \frac{D}{T_2}$

En donnant leurs valeurs à C et D :

$$A = \frac{-T_1^2}{T_1 - T_2} + \frac{T_2^2}{T_1 - T_2} = \frac{(T_1 + T_2)(T_2 - T_1)}{(T_1 - T_2)} = -(T_2 + T_1)$$

$F(p)$ s'écrit maintenant :

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{(T_1 + T_2)}{p} + \frac{T_1^3}{T_1 - T_2} \frac{1}{(1 + T_1 p)} + \frac{T_2^3}{T_2 - T_1} \frac{1}{(1 + T_2 p)}$$

3-2-3-8 Exemple 8 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$

En mettant $F(p)$ sous une forme différente :

$$F(p) = \frac{1}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} = \frac{\omega_n^2}{p (\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)}$$

on fait apparaître l'expression $(\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)$. C'est un trinôme du second degré possédant deux racines complexes conjuguées (Nous avons vu au § 3-1-2 cas 1 & 2 que, dans le cas où il possède des racines réelles, le dénominateur de $F(p)$ se met sous une autre forme.), que l'on peut réécrire :

$$(\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2) = (p + a)^2 + (b)^2 \quad \text{avec:} \quad a = z\omega_n \quad ; \quad b = \omega_n \sqrt{1 - z^2}$$

$$F(p) \text{ s'écrit maintenant : } F(p) = \frac{\omega_n^2}{p \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2 \right]}$$

Décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{p \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2 \right]} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour A, B et C.

$$pF(p) = \frac{\omega_n^2}{\left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2 \right]} = A + \frac{p(Bp + C)}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2}$$

En posant $p = 0$, il vient : $A=1$

$$\left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2 \right] F(p) = \frac{\omega_n^2}{p} = \frac{A \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - z^2})^2 \right]}{p} + Bp + C$$

En posant : $p = -z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - z^2}$ (qui est racine du polynôme voir § 3-1-2 cas 3) on trouve l'équation complexe :

$$\frac{\omega_n^2}{-z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - z^2}} = B(-z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - z^2}) + C$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \left[(-Bz\omega_n - jB\omega_n \sqrt{1 - z^2}) + C \right] (-z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - z^2})$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \left[Bz^2\omega_n^2 - B\omega_n^2(1 - z^2) - Cz\omega_n \right] + j \left[2Bz\omega_n^2 \sqrt{1 - z^2} - C\omega_n \sqrt{1 - z^2} \right]$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient deux équations réelles :

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= Bz^2\omega_n^2 - B\omega_n^2(1-z^2) - Cz\omega_n \\ 0 &= 2Bz\omega_n^2\sqrt{1-z^2} - C\omega_n\sqrt{1-z^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= B\omega_n^2(2z^2-1) - Cz\omega_n \\ 0 &= 2Bz\omega_n - C \end{aligned} \right\}$$

On en déduit : $C = 2zB\omega_n$; $B = -1 \Rightarrow C = -2z\omega_n$

F(p) s'écrit maintenant :

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{-p - 2z\omega_n}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2}$$

3-2-3-9 Exemple 9 : Décomposer $F(p) = \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)} = \frac{\omega_n^2}{p^2 (\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)}$

On modifie le dénominateur comme dans l'exemple précédent. F(p) s'écrit :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]}$$

Décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour B, C et D.

$$p^2 F(p) = \frac{\omega_n^2}{\left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]} = Ap + B + \frac{p^2(Cp + D)}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2}$$

En posant $p = 0$, il vient : $B=1$

$$\left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right] F(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2} = \frac{A \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]}{p} + \frac{B \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-z^2})^2 \right]}{p^2} + Cp + D$$

En posant : $p = -z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2}$ on trouve l'équation complexe :

$$\frac{\omega_n^2}{(-z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2})^2} = C(-z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2}) + D$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \left[(-Cz\omega_n - jC\omega_n\sqrt{1-z^2}) + D\right](-z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2})^2$$

$$\Leftrightarrow \omega_n^2 = \left[(-Cz\omega_n - jC\omega_n\sqrt{1-z^2}) + D\right]\left[z^2\omega_n^2 - \omega_n^2(1-z^2) + 2jz\omega_n^2\sqrt{1-z^2}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \omega_n^2 = -Cz\omega_n^3(2z^2-1) + D\omega_n^2(2z^2-1) - jC\omega_n^3\sqrt{1-z^2}(2z^2-1) - 2jCz^2\omega_n^3\sqrt{1-z^2} + 2jDz\omega_n^2\sqrt{1-z^2} + 2Cz\omega_n^3(1-z^2)$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient deux équations réelles :

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= -Cz\omega_n^3(2z^2-1) + D\omega_n^2(2z^2-1) + 2Cz\omega_n^3(1-z^2) \\ 0 &= +2Dz\omega_n^2\sqrt{1-z^2} - C\omega_n^3\sqrt{1-z^2}(2z^2-1) - 2Cz^2\omega_n^3\sqrt{1-z^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 &= Cz\omega_n^3(3-4z^2) + D\omega_n^2(2z^2-1) \\ 0 &= +2Dz - C\omega_n(2z^2-1) - 2Cz^2\omega_n \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= Cz\omega_n(3-4z^2) + D(2z^2-1) \\ 0 &= +2Dz - C\omega_n(4z^2-1) \end{aligned} \right\}$$

La seconde équation nous donne :

$$D = \frac{C\omega_n}{2z}(4z^2-1)$$

En plongeant ceci dans la première équation, on a :

$$Cz\omega_n(3-4z^2) + \frac{C\omega_n}{2z}(4z^2-1)(2z^2-1) = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{z\omega_n(3-4z^2) + \frac{\omega_n}{2z}(4z^2-1)(2z^2-1)} = \frac{2z}{2z^2\omega_n(3-4z^2) + \omega_n(8z^2-6z+1)}$$

$$= \frac{2z}{6z^2\omega_n - 8z^4\omega_n + 8z^4\omega_n - 6z^2\omega_n + \omega_n} = \frac{2z}{\omega_n}$$

On en déduit : $D = \frac{C\omega_n}{2z}(4z^2 - 1) = (4z^2 - 1)$

Pour déterminer A, on utilise la méthode 3 en multipliant F(p) par p et en faisant tendre p vers l'infini.

$$pF(p) = \frac{\omega_n^2}{p \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2 \right]} = A + \frac{B}{p} + \frac{p(Cp + D)}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p(Cp + D)}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p(Cp + D)}{(p^2 + 2z\omega_n p + \omega_n^2)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{C + \frac{D}{p}}{\left(1 + \frac{2z\omega_n}{p} + \frac{\omega_n^2}{p^2} \right)} \right) = C$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{B}{p} \right) = 0; \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = 0$$

ce qui nous donne l'équation à une inconnue : $0 = A + C$

On en déduit : $A = -C = \frac{-2z}{\omega_n}$

F(p) s'écrit finalement :

$$F(p) = \frac{-2z}{\omega_n} \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\frac{2z}{\omega_n} p + (4z^2 - 1)}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2}$$

3-2-3-10 Exemple 10 : Décomposer $F(p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$

Décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)} = \frac{A}{(1 + Tp)} + \frac{Bp + C}{(p^2 + \omega^2)}$$

Recherche des coefficients : On applique la méthode 2 pour A, B et C

$$(1 + Tp)F(p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)} = A + \frac{(Bp + C)(1 + Tp)}{(p^2 + \omega^2)}$$

En posant $p = \frac{-1}{T}$, il vient : $A = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)} = \frac{\omega T^2}{1 + T^2 \omega^2}$

$$(p^2 + \omega^2)F(p) = \frac{\omega}{(1 + Tp)} = \frac{A(p^2 + \omega^2)}{(1 + Tp)} + Bp + C$$

En posant : $p = j\omega$ on trouve l'équation complexe :

$$\frac{\omega}{(1 + Tj\omega)} = Bj\omega + C$$

$$\omega = (Bj\omega + C)(1 + Tj\omega) = C - BT\omega^2 + j(B\omega + CT\omega)$$

En identifiant parties réelles et parties imaginaires, il vient deux équations réelles :

$$\left. \begin{array}{l} \omega = C - BT\omega^2 \\ 0 = B\omega + CT\omega \end{array} \right\}$$

La seconde équation nous donne :

$$B = -CT$$

En plongeant ceci dans la première équation, on a :

$$\omega = C + CT^2\omega^2 = C(1 + T^2\omega^2) \Rightarrow C = \frac{\omega}{(1 + T^2\omega^2)}$$

$$B = -CT = \frac{-\omega T}{(1 + T^2\omega^2)}$$

F(p) s'écrit finalement :

$$F(p) = \frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)} = \frac{T^2\omega}{(1 + T^2\omega^2)} \frac{1}{(1 + Tp)} + \frac{\omega}{(1 + T^2\omega^2)} \frac{1 - Tp}{(p^2 + \omega^2)}$$

Chapitre 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINEAIRES

«Une fausse erreur n'est pas forcément une
vérité vraie.»

Pierre Dac

4-1 PRESENTATION

Un grand nombre de systèmes physiques relèvent d'un comportement modélisable par une (ou des) équation(s) différentielle(s). De fait, la description de la loi entrée/sortie des systèmes mécaniques, électriques ou hydrauliques rencontrés en asservissement fera souvent appel à une équation différentielle. Cette dernière se présentera sous une forme particulière, dite : « Equation différentielle linéaire à coefficients constants ». Les hypothèses nécessaires à l'obtention d'une équation linéaire seront examinées dans le cours d'asservissement.

La forme la plus générale est la suivante :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t)$$

Avec: $e(t)$ fonction d'entrée
 $s(t)$ fonction de sortie

* La variable est le temps : en effet, on désire, dans la plupart des cas, contrôler l'évolution temporelle d'une grandeur.

* Les a_i sont des coefficients constants, car combinaisons de grandeurs telles que : longueur, masse, résistance, coeff. de frottement, etc.

* Cette équation ne possède pas de terme constant : elle est dite "homogène" et elle représente l'évolution de la grandeur de sortie autour d'un point d'équilibre. Il est toujours possible de transformer une équation non homogène en équation homogène en effectuant un changement de variable (voir "Mouvement libre" page suivante).

* La fonction d'entrée apparaît le plus souvent sous une forme non dérivée. L'équation devient alors :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = e(t) \quad (4-1)$$

(Equation d'ordre n)

La représentation schématique du système est :

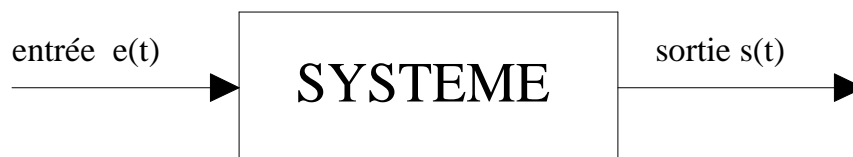


fig. 4-1

On remarquera que l'on ne peut pas exprimer directement la sortie en fonction de l'entrée, c.a.d. que, pour l'instant, nous ne pouvons rien écrire de mieux que "SYSTEME" dans le rectangle.

La résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants repose sur le principe de base suivant :

La solution de l'équation est la somme de deux contributions :

* Une solution sans second membre, correspondant physiquement à un régime transitoire, appelée aussi réponse libre : $s_l(t)$ et qui doit satisfaire aux conditions initiales. On cherchera donc la solution de :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = 0 \quad (4-2)$$

* Une solution particulière avec second membre, correspondant physiquement à un régime permanent, appelée aussi réponse forcée : $s_f(t)$. On cherchera donc UNE solution de :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = e(t) \quad (4-1)$$

Mouvement libre : c'est le cas de l'essai de lâcher d'une masse M accrochée à un ressort vertical : l'équation est de la forme :

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = Mg \quad \text{Equation non homogène.}$$

en effectuant un changement de variable, on obtient dans le nouveau repère :

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = 0 \quad \text{Equation homogène.}$$

Les deux premiers termes de cette équation décrivent le comportement dynamique de l'ensemble puisqu'ils sont proportionnels respectivement à l'accélération et à la vitesse. Lorsque la masse est immobile, ils sont nuls et le troisième terme donne bien $x(t) = 0$.

Lors du lâcher, on observe un mouvement oscillatoire amorti autour de la position de repos $x = 0$.

Dans le cas où le ressort est soumis à une sollicitation entretenue (un autre ressort qui oscille par exemple), il faudra ajouter à la réponse libre un terme permanent qui est de même nature que la sollicitation.

REMARQUE: Le parallélisme entre réponse libre et régime transitoire d'une part et entre réponse forcée et régime permanent d'autre part n'est pas tout à fait rigoureux : En effet, les mathématiciens montrent que la réponse est la SOMME des réponses libre et forcée, alors que les mécaniciens considèrent que la réponse est la SUCCESSION d'un régime transitoire puis d'un régime permanent. Ceci se justifie par le fait que la réponse libre, qui comme nous l'avons dit tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, n'est plus perceptible (ou mesurable) au bout d'un certain temps. (alors que mathématiquement parlant, elle existe encore). D'où l'appellation de "transitoire".

4-2 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

4-2-1 METHODE DE RESOLUTION

L'équation est de la forme :

$$A \frac{ds(t)}{dt} + Bs(t) = Ce(t)$$

On mettra cette équation sous une autre forme qui est plus "parlante", avec : $T = A/B$ et $K = C/B$ réels et positifs.

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (4-3)$$

En effet, les constantes K et T ont une signification physique, gain et constante de temps en l'occurrence, ce qui n'est pas le cas de A, B et C.

Nous avons vu que la solution est la somme de deux contributions :

- * Une solution sans second membre, appelée aussi réponse libre : $s_l(t)$.
- * Une solution particulière avec second membre, appelée aussi réponse forcée : $s_f(t)$.

4-2-1-1 Solution sans second membre.

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0 \quad (4-4)$$

L'équation (4-4) décrit le comportement du système laissé à lui-même. (pas de sollicitation en entrée). Elle est dite "à variables séparables". En effet,

$$(4-4) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds(t)}{s(t)} = -\frac{dt}{T}$$

En intégrant, il vient :

$$\log s(t) = \frac{-t}{T} + c^{te} \quad \Rightarrow \quad s(t) = e^{\frac{-t}{T} + c^{te}} = e^{\frac{-t}{T}} \cdot e^{c^{te}} = \lambda \cdot e^{\frac{-t}{T}}$$

La constante λ est déterminée par les conditions initiales. On peut remarquer que l'exponentielle va tendre vers zéro, ce qui correspond bien à une réponse transitoire.

$$\Rightarrow s_l(t) = \lambda \cdot e^{\frac{-t}{T}}$$

4-2-1-2 Solution avec second membre.

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (4-3)$$

Cette équation décrit le comportement du système soumis à une entrée $e(t)$. On recherchera une solution particulière de (4-3), de la même forme que l'entrée $e(t)$.

$$\Rightarrow s_f(t) = K.e(t)$$

REMARQUE

Dans le cas où le second membre contient un terme constant, l'équation (4-3) devient :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) + \alpha$$

L'équation n'est plus homogène. On effectue un changement de variable :

$$s_1(t) = s(t) - \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}$$

en réécrivant l'équation, on a :

$$T \frac{ds_1(t)}{dt} + s_1(t) = Ke(t)$$

ce qui nous ramène à la forme (4-3). $s_1(t) = K.e(t) \quad \Rightarrow \quad s_f(t) = K.e(t) + \alpha$

4-2-1-3 Solution complète.

Elle est la somme des réponses transitoire et permanente. $s(t) = s_f(t) + s_l(t)$

$$s(t) = \lambda.e^{\frac{-t}{T}} + K.e(t)$$

4-2-2 EXEMPLES :**4-2-2-1 Système soumis à une entrée échelon.**

L'entrée échelon s'écrit: $e(t) = E_0 \quad \forall t > 0$; $e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-3) devient alors: $T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE_0 \quad (4-5)$

Réponse forcée, solution particulière : on prend $s(t) = \text{cte} = \alpha$

En remplaçant dans (4-5) $\Rightarrow s_f(t) = KE_0 = \alpha$

La solution complète est: $s(t) = s_f(t) + s_l(t) = \lambda.e^{\frac{-t}{T}} + K.E_0$

En tenant compte des conditions initiales (système partant du repos, dans le cas courant) :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda = -K.E_0$$

Finalement:

$$s(t) = K.E_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{T}} \right)$$

4-2-2-2 Système soumis à une entrée rampe.

La rampe s'écrit: $e(t) = a.t \quad \forall t > 0$; $e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-3) s'écrit alors: $T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.a.T \quad (4-6)$

Réponse forcée, solution particulière :

$$\text{On prend: } s(t) = \alpha.t + \beta \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \alpha$$

en remplaçant s(t) dans l'équation (4-6) :

$$\alpha + \beta + \alpha T = K.a.T \Rightarrow \alpha = K.a \quad \text{et} \quad \beta = -K.a.T$$

La solution particulière est alors: $s_f(t) = K.a.t - K.a.T = K.a(t - T)$

La solution complète est : $s(t) = s_l(t) + s_f(t) = K.a(t - T) + \lambda.e^{\frac{-t}{T}}$

En tenant compte des conditions initiales (système partant du repos) :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda = K.a.T$$

Finalement:

$$s(t) = K.a \left(t - T + T.e^{\frac{-t}{T}} \right)$$

4-2-2-3: Système soumis à une entrée harmonique.

L'entrée harmonique s'écrit : $e(t) = E_0 \sin \omega t \quad \forall t > 0$; $e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-3) s'écrit alors: $T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.E_0 \sin \omega t \quad (4-7)$

Méthode 1 :

Réponse forcée, solution particulière : On cherche une solution de (4-7) sous la forme :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{ds(t)}{dt} = S_0 \omega \cos(\omega t + \phi)$$

En injectant dans (4-7), on a : $TS_0 \omega \cos(\omega t + \phi) + S_0 \sin(\omega t + \phi) = kE_0 \sin \omega t$

Posons : $(\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \omega t = -\phi$

$$\text{puis : } (\omega t + \phi) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right)$$

$$\Rightarrow TS_0 \omega = kE_0 \sin \omega t = -kE_0 \sin \phi \quad (4-8)$$

$$\text{et } S_0 = kE_0 \sin \omega t = kE_0 \cos \phi \quad (4-9)$$

$$(4-8) \quad \Rightarrow \quad \sin \phi = -\frac{T \omega S_0}{kE_0}$$

$$(4-9) \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{S_0}{kE_0}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg} \phi = -T \omega \quad \Rightarrow \quad \phi = -\arctg(T \omega)$$

En élevant (4-8) et (4-9) au carré et en les additionnant, il vient :

$$S_0^2 (1 + T^2 \omega^2) = k^2 E_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

Solution générale = solution forcée + solution libre :

$$s(t) = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \phi) + \lambda e^{\frac{-t}{T}}$$

En appliquant les conditions initiales à la solution générale :

$$s(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin \phi + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-kE_0 \sin \phi}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} = \frac{kE_0 T \omega}{1 + T^2 \omega^2} \quad \text{avec : } \sin \phi = \frac{-\omega T}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

Finalement:

$$s(t) = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \left(\sin(\omega t + \phi) + \frac{\omega T e^{\frac{-t}{T}}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right)$$

Avec : $\phi = -\arctg(T \omega)$

Méthode 2

On cherche la solution permanente sous la même forme que précédemment $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi)$, en utilisant la notation exponentielle complexe (voir § 2-4).

$$\sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(e^{j(\omega t + \phi)})$$

On écrira donc :

$$s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds(t)}{dt} = jS_0 \omega e^{j(\omega t + \phi)}$$

En remplaçant, dans (4-7),

$$j\omega TS_0 e^{j(\omega t + \phi)} + S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = kE_0 e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad j\omega TS_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} + S_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} = kE_0 e^{j\omega t}$$

$$(1 + j\omega T)S_0 e^{j\phi} = kE_0 \quad \Rightarrow \quad S_0 e^{j\phi} = \frac{kE_0}{1 + jT\omega} \quad \text{équation complexe}$$

En égalant les modules, on a :

$$S_0 = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

et en égalant les arguments, on trouve ;

$$s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = j\omega e^{j(\omega t + \phi)}$$

Solution générale= Solution libre + solution forcée :

$$s(t) = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \phi) + \lambda e^{\frac{-t}{T}}$$

On détermine λ de la même manière que dans le cas précédent et, finalement :

$$s(t) = \frac{kE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \left(\sin(\omega t + \phi) + \frac{\omega T e^{\frac{-t}{T}}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \right)$$

Avec : $\phi = -\arctg(T\omega)$

REMARQUE IMPORTANTE :

Lors de l'étude de la réponse harmonique d'un système en asservissement, on fera l'hypothèse que la fonction entrée est appliquée depuis un temps suffisamment long pour que le régime transitoire ait disparu. Seule la réponse permanente nous intéresse alors et le calcul précédent est simplifié. Le résultat "utile" se présentera sous la forme suivante :

$$s(t) = s_f(t) = \frac{kE_0}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} (\sin(\omega t + \phi))$$

avec : $\frac{S_0}{E_0} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$: Rapport d'amplitude

et : $\phi = -\arctg(T\omega)$: Déphasage.

Nous aurons l'occasion de reparler abondamment du rapport d'amplitude et du déphasage dans le cours d'asservissements.

4-3 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE**4-3-1 GENERALITES**

La mise en équation d'un grand nombre de systèmes mécaniques aboutit à une équation de la forme :

$$A \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + B \frac{ds(t)}{dt} + Cs(t) = De(t)$$

On la mettra sous la forme suivante, qui est plus "parlante" :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t) \quad (4-10)$$

avec: $K = \frac{D}{C}$ $\omega_n = \sqrt{\frac{C}{A}}$ $z = \frac{B}{2\sqrt{AC}}$ réels et positifs pour ce qui nous concerne.

En effet, les constantes K , ω_n , et z ont une signification physique, respectivement gain, pulsation propre non amortie et facteur d'amortissement, ce qui n'est pas le cas de A , B , C et D .

REMARQUE 1 : Il existe d'autres notations pour le facteur d'amortissement, en particulier " m " et " ξ ". Cette dernière est utilisée lorsque l'on étudie les asservissements échantillonnés, car z représente alors une variable.

REMARQUE 2 : dans certains cas l'équation se ramène à un premier ordre : en effet, l'équation

$T \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$ Correspond à un système du second ordre avec une intégration que l'on rencontre souvent en asservissements.

On pose alors : $f(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

L'équation se réécrit : $T \frac{df(t)}{dt} + f(t) = Ke(t)$

qui est une équation du premier ordre dont la solution est : $f(t) = \lambda e^{\frac{-t}{T}} + Ke(t)$

On obtient finalement $s(t)$ en intégrant $f(t)$. $s(t) = \int f(t).dt$

4-3-2 METHODE DE RESOLUTION

Nous savons que la solution est la somme de deux contributions :

- * Une solution sans second membre, appelée aussi réponse libre : $s_l(t)$.
- * Une solution particulière avec second membre, appelée aussi réponse forcée : $s_f(t)$.

4-3-2-1 Solution sans second membre.

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0 \quad (4-11)$$

L'équation (4-11) décrit le comportement du système laissé à lui-même. (pas de sollicitation en entrée). On va chercher une solution de la forme : $s(t) = e^{rt}$

Les dérivées sont : $\frac{ds(t)}{dt} = r e^{rt}$ et $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = r^2 e^{rt}$

En reportant dans (4-11) :

$$\left(\frac{r^2}{\omega_n^2} + \frac{2zr}{\omega_n} + 1 \right) e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2}{\omega_n^2} + \frac{2zr}{\omega_n} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2z\omega_n r + \omega_n^2 = 0 \quad (4-12)$$

(4-12) est un trinôme du second degré en r pour lequel il existe trois cas suivant le signe du déterminant $\Delta = 4\omega_n^2(z^2 - 1)$

a) 1^{er} cas: $\Delta > 0 \Leftrightarrow z > 1$

Il existe deux racines réelles et négatives

$$r_1 = \frac{-2z\omega_n + 2\omega_n\sqrt{z^2 - 1}}{2} = -\omega_n(z - \sqrt{z^2 - 1})$$

$$r_2 = \frac{-2z\omega_n - 2\omega_n\sqrt{z^2 - 1}}{2} = -\omega_n(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Les fonctions : $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ sont toutes les deux intégrales particulières de l'équation sans second membre (4-11). L'intégrale générale s'écrit comme une combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$s(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ constantes définies par les conditions initiales.}$$

On peut remarquer que les exponentielles vont tendre vers zéro (car les racines sont négatives), ce qui correspond bien à une réponse transitoire.

En asservissements, on pose de préférence :

$$T_1 = \frac{-1}{r_1} = \frac{1}{\omega_n(z - \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{-1}{r_2} = \frac{1}{\omega_n(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

Ce qui revient à écrire l'équation (4-10) de la manière suivante :

$$T_1 T_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0 \quad \text{ATTENTION ! cette forme n'est valide que si } z > 1$$

Finalement:

$$s_1(t) = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T_1}} + \lambda_2 e^{\frac{-t}{T_2}}$$

b) 2^d cas: $\Delta = 0 \Leftrightarrow z = 1$

Il existe une racine double réelle et négative

$$r = -z\omega_n = -\omega_n \Rightarrow s(t) = e^{-z\omega_n t}$$

La fonction $s(t)$ est intégrale particulière de (4-11) ; on cherche l'intégrale générale sous la forme :

$$s(t) = e^{rt} f(t) \quad \text{avec: } f(t) \text{ fonction inconnue}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = re^{rt} f(t) + e^{rt} f'(t) = e^{rt} (rf(t) + f'(t))$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = r^2 e^{rt} f(t) + re^{rt} f'(t) + re^{rt} f'(t) + e^{rt} f''(t) = e^{rt} (r^2 f(t) + 2rf'(t) + f''(t))$$

En reportant dans (4-11) et en multipliant les deux membres par ω_n^2 :

$$\begin{aligned} e^{rt} \left[(r^2 f(t) + 2rf'(t) + f''(t)) + 2z\omega_n (rf(t) + f'(t)) + \omega_n^2 f(t) \right] &= 0 \\ \Rightarrow e^{rt} \left[(r^2 + 2zr\omega_n + \omega_n^2) f(t) + (2r + 2z\omega_n) f'(t) + f''(t) \right] &= 0 \\ \text{or : } (r^2 + 2zr\omega_n + \omega_n^2) &= 0 \quad \text{et} \quad (2r + 2z\omega_n) = 0 \\ \Rightarrow e^{rt} f''(t) = 0 &\Rightarrow f''(t) = 0 \Rightarrow f(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 \end{aligned}$$

La solution est de la forme : $s(t) = e^{rt}(\lambda_1 t + \lambda_2) = e^{-\omega_n t}(\lambda_1 t + \lambda_2)$

En posant, de la même manière que dans le cas précédent : $T = -1/r$, on obtient finalement :

$$s_1(t) = e^{\frac{-t}{T}} (\lambda_1 t + \lambda_2)$$

c) 3^{ème} cas: $z < 1 \Leftrightarrow \Delta < 0$

Il existe deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\omega_n (z - j\sqrt{1-z^2}) = (a + jb) \\ r_2 &= -\omega_n (z + j\sqrt{1-z^2}) = (a - jb) \\ \text{avec } a &= -z\omega_n ; b = \omega_n \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

La solution est de la forme :

$$s(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} = \lambda_1 e^{(a+jb)t} + \lambda_2 e^{(a-jb)t} = \lambda_1 e^{at} e^{jbt} + \lambda_2 e^{at} e^{-jbt} = e^{at} (\lambda_1 e^{jbt} + \lambda_2 e^{-jbt})$$

En développant les exponentielles complexes, on a :

$$s(t) = e^{at} (\lambda_1 (\cos bt + j \sin bt) + \lambda_2 (\cos bt - j \sin bt))$$

Cette solution est une fonction complexe. Dans les problèmes de mécanique, on ne s'intéresse qu'aux solutions réelles : on prendra donc λ_1 et λ_2 complexes conjugués.

$$\lambda_1 = (c + jd) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (c - jd)$$

En reportant :

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{at} ((c + jd)(\cos bt + j \sin bt) + (c - jd)(\cos bt - j \sin bt)) \\ &= e^{at} (c \cos bt + c j \sin bt + d j \cos bt + j^2 d \sin bt + c \cos bt - j d \cos bt - j c \sin bt + j^2 d \sin bt) \\ &= e^{at} (2c \cos bt - 2d \sin bt) \end{aligned}$$

En posant $\alpha = 2b$ et $\beta = -2d$:

$$s(t) = e^{at}(\alpha \cos bt + \beta \sin bt) \quad \text{avec : } (\alpha \cos bt + \beta \sin bt) = \lambda \sin(bt + \varphi)$$

$$\text{En effet : } \lambda \sin(bt + \varphi) = \lambda \cos bt \sin \varphi + \lambda \sin bt \cos \varphi$$

$$\text{Par identification : } \alpha = \lambda \sin \varphi \quad \text{et} \quad \beta = \lambda \cos \varphi$$

$$\Rightarrow s(t) = \lambda e^{at} \sin(bt + \varphi)$$

Finalement:

$$s_1(t) = \lambda e^{-z\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi\right)$$

4-3-2-2 Solution avec second membre.

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t) \quad (4-10)$$

Cette équation décrit le comportement du système soumis à une entrée $e(t)$. On recherchera une solution particulière de (4-10), de la même forme que l'entrée $e(t)$.

$$\Rightarrow s_f(t) = K.E(t)$$

REMARQUE

Dans le cas où le second membre contient un terme constant, l'équation (4-10) devient :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t) + \alpha$$

L'équation n'est plus homogène. On effectue un changement de variable :

$$s_1(t) = s(t) - \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt}$$

en réécrivant l'équation, on a :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds_1(t)}{dt} + s_1(t) = K.e(t)$$

ce qui nous ramène à la forme (4-10).

$$s_1(t) = K.e(t) \quad \Rightarrow \quad s_f(t) = K.e(t) + \alpha$$

4-3-1-3 Solution complète.

Elle est la somme des réponses transitoire et permanente. $s(t) = s_f(t) + s_l(t)$

Suivant la valeur de z , on aura :

$$\begin{aligned} \text{si } z > 1 \quad & s(t) = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T_1}} + \lambda_2 e^{\frac{-t}{T_2}} + K e(t) \\ \text{si } z = 1 \quad & s(t) = e^{\frac{-t}{T}} (\lambda_1 t + \lambda_2) + K e(t) \\ \text{si } z < 1 \quad & s(t) = \lambda e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \phi) + K e(t) \end{aligned}$$

4.3.3 EXEMPLES**4.3.3.1 Réponse à une entrée échelon**

L'entrée échelon s'écrit: $e(t) = E_0 \quad \forall t > 0 \quad ; \quad e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-10) devient alors:
$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot E_0 \quad (4-13)$$

Réponse forcée, solution particulière : on prend $s(t) = \text{cte} = \alpha$

En remplaçant dans (4-13) $\Rightarrow s_f(t) = K E_0 = \alpha$

La solution complète est: $s(t) = s_f(t) + s_l(t)$. Elle dépend de la valeur de z :

a) si $z > 1$
$$s(t) = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T_1}} + \lambda_2 e^{\frac{-t}{T_2}} + K E_0$$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \frac{-\lambda_1}{T_1} e^{\frac{-t}{T_1}} - \frac{\lambda_2}{T_2} e^{\frac{-t}{T_2}}$$

En tenant compte des conditions initiales (système partant du repos, dans le cas courant) :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = -K \cdot E_0 \quad (4-14)$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-\lambda_1}{T_1} - \frac{\lambda_2}{T_2} = 0 \quad (4-15)$$

$$(4-15) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{T_1 \lambda_2}{T_2}$$

$$(4-14) \Rightarrow \lambda_2 - \frac{T_1 \lambda_2}{T_2} = -K E_0 \Rightarrow \frac{\lambda_2 (T_1 - T_2)}{T_2} = -K E_0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{K E_0 T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\text{et: } \lambda_1 = \frac{T_1 K E_0 T_2}{T_2 (T_2 - T_1)} = \frac{T_1 K E_0}{(T_2 - T_1)}$$

Finalement:

$$s(t) = K.E_0 \left(1 + \frac{I}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right) \right)$$

b) si $z = 1$ $s(t) = e^{\frac{-t}{T}} (\lambda_1 t + \lambda_2) + K.E_0$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T}} - \frac{\lambda_1 t}{T} e^{\frac{-t}{T}} - \frac{\lambda_2}{T} e^{\frac{-t}{T}}$$

En tenant compte des conditions initiales :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -K.E_0$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{T} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{T} = \frac{-KE_0}{T}$$

Finalement:

$$s(t) = K.E_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{T}} \left(\frac{t}{T} + 1 \right) \right)$$

c) si $z < 1$ $s(t) = \lambda e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + KE_0$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = -z\omega_n \lambda e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + \lambda e^{-z\omega_n t} \sqrt{1-z^2} \omega_n \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi)$$

Conditions initiales :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda \sin(\varphi) + KE_0 = 0 \Rightarrow -\lambda \sin(\varphi) = KE_0 \quad (4-16)$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow -z\omega_n \lambda \sin(\varphi) + \lambda \sqrt{1-z^2} \omega_n \cos(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow -z\lambda \sin(\varphi) + \lambda \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi) = 0 \quad (4-17)$$

$$(4-16) \text{ et } (4-17) \Rightarrow zKE_0 + \lambda \sqrt{1-z^2} \cos(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{zKE_0}{\sqrt{1-z^2}} = -\lambda \cos \varphi \quad (4-18)$$

$$(4-16)^2 + (4-18)^2 \Rightarrow K^2 E_0^2 + \frac{z^2 K^2 E_0^2}{1-z^2} = \lambda^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

$$\Rightarrow K^2 E_0^2 \left[1 + \frac{z^2}{1-z^2} \right] = \lambda^2 \Rightarrow \frac{K^2 E_0^2}{1-z^2} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{KE_0}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{(4-16)}{(4-18)} \Rightarrow \operatorname{tg}(\varphi) = + \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

Finalement:

$$s(t) = KE_0 + \frac{KE_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-z^2}\omega_n t + \varphi\right)$$

avec : $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

REMARQUE: de (4-16) et (4-18) on déduit : $\sin(\varphi) = -\sqrt{1-z^2}$ et $\cos(\varphi) = -z$. $\Rightarrow \varphi$ est un angle situé dans le troisième quadrant. Il faudra en tenir compte lors de la détermination de la fonction Arctg (voir aussi la remarque §1-4-5).

4-3-3-2 Réponse à une entrée rampe

La rampe s'écrit: $e(t) = a.t \quad \forall t > 0$; $e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-10) devient alors: $\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.a.t \quad (4-19)$

Réponse forcée, solution particulière : on prend $s(t) = Kat + \alpha$

En remplaçant dans (4-19) :

$$\frac{2zKa}{\omega_n} + Kat + \alpha = Kat \Rightarrow \alpha = -\frac{2zKa}{\omega_n} \Rightarrow s_f(t) = \left(Kat - \frac{2zKa}{\omega_n} \right)$$

La solution complète est: $s(t) = s_f(t) + s_i(t)$. Elle dépend de la valeur de z :

a) si $z > 1$ $s(t) = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T_1}} + \lambda_2 e^{\frac{-t}{T_2}} + Ka \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right)$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \frac{-\lambda_1}{T_1} e^{\frac{-t}{T_1}} - \frac{\lambda_2}{T_2} e^{\frac{-t}{T_2}} + Ka$$

En tenant compte des conditions initiales (système partant du repos, dans le cas courant) :

$$s(0) = 0 \Rightarrow -\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{2zKa}{\omega_n} = 0 \quad (4-20)$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-\lambda_1}{T_1} - \frac{\lambda_2}{T_2} + Ka = 0 \quad (4-21)$$

$$(4-20) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2zKa}{\omega_n} - \lambda_1$$

$$(4-21) \Rightarrow \lambda_1 = \left(Ka - \frac{\lambda_2}{T_2} \right) T_1$$

$$(4-20) \text{ et } (4-21) \Rightarrow \lambda_2 = -\left(Ka - \frac{\lambda_2}{T_2}\right)T_1 + \frac{2zKa}{\omega_n} \Rightarrow \lambda_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = -Ka \left(T_1 - \frac{2z}{\omega_n}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -Ka \frac{\left(T_1 - \frac{2z}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)} = \frac{-KaT_2 \left(T_1 - \frac{2z}{\omega_n}\right)}{T_2 - T_1} \quad \text{avec: } \left(T_1 - \frac{2z}{\omega_n}\right) = T_2 \quad (\S 4-3-2-1a)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{KaT_2^2}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{-KaT_1^2}{T_1 - T_2}$$

Finalement:

$$s(t) = K.a \left(t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_2^2 e^{\frac{-t}{T_2}} - T_1^2 e^{\frac{-t}{T_1}} \right) \right)$$

b) si $z = 1$ $s(t) = e^{\frac{-t}{T}} (\lambda_1 t + \lambda_2) + K.a \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right)$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \lambda_1 e^{\frac{-t}{T}} - \frac{\lambda_1 t}{T} e^{\frac{-t}{T}} - \frac{\lambda_2}{T} e^{\frac{-t}{T}} + K.a$$

En tenant compte des conditions initiales :

$$s(0) = 0 \Rightarrow -\frac{2zK.a}{\omega_n} + \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{2zK.a}{\omega_n} = 2TK.a \quad \text{avec: } z = 1 \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow K.a + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{T} = 0 \quad \text{En remplaçant } \lambda_2:$$

$$\Rightarrow K.a + \lambda_1 - 2K.a = 0 \Rightarrow \lambda_1 = K.a$$

Finalement:

$$s(t) = K.a \left((t - 2T) + e^{\frac{-t}{T}} (t + 2T) \right)$$

c) si $z < 1$ $s(t) = \lambda e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + K.a \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right)$

$$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = -z\omega_n \lambda e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + \lambda e^{-z\omega_n t} \sqrt{1-z^2} \omega_n \cos(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) + K.a$$

Conditions initiales :

$$s(0) = 0 \Rightarrow \lambda \sin(\varphi) - \frac{2zK.a}{\omega_n} = 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{2zK.a}{\lambda\omega_n} \quad (4-22)$$

$$\frac{ds(0)}{dt} = 0 \Rightarrow -z\omega_n \lambda \sin(\varphi) + \lambda\sqrt{1-z^2}\omega_n \cos(\varphi) + K.a = 0 \quad (4-23)$$

$$\begin{aligned} (4-22)(z\omega_n) + (4-23) &\Rightarrow -2z^2K.a + K.a + \lambda\sqrt{1-z^2}\omega_n \cos(\varphi) = 0 \\ &\Rightarrow \cos\varphi = \frac{-K.a(1-2z^2)}{\lambda\omega_n\sqrt{1-z^2}} \end{aligned} \quad (4-24)$$

$$\frac{(4-22)}{(4-24)} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\frac{2zK.a}{\lambda\omega_n}}{\frac{K.a(1-2z^2)}{\lambda\omega_n\sqrt{1-z^2}}} = \frac{-2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2}$$

$$\begin{aligned} (4-22)^2 + (4-24)^2 = 1 &\Rightarrow \frac{4z^2K.a^2}{\lambda^2\omega_n^2} + \frac{K.a^2(1-2z^2)^2}{\lambda^2\omega_n^2(1-z^2)} = 1 \\ \Rightarrow \frac{K.a^2}{\lambda^2\omega_n^2} \left[\frac{4z^2(1-2z^2)^2}{1-z^2} \right] = 1 &\Rightarrow \lambda = \frac{K.a}{\omega_n} \sqrt{\frac{1}{1-z^2}} \end{aligned}$$

Finalement:

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= K.a \left(t - \frac{2z}{\omega_n} \right) + \frac{K.a}{\omega_n\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2}\omega_n t + \varphi) \\ \text{avec : } \varphi &= -\operatorname{arctg} \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2} \end{aligned}}$$

4-3-3-3 Système soumis à une entrée harmonique.

L'entrée harmonique s'écrit : $e(t) = E_0 \sin \omega t \quad \forall t > 0$; $e(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

L'équation (4-10) devient alors:
$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.E_0 \sin \omega t \quad (4-25)$$

REMARQUE : De la même manière que pour les systèmes du premier ordre, on fera l'hypothèse que la fonction entrée est appliquée depuis un temps suffisamment long pour que le régime transitoire ait disparu, dans le cas de l'étude harmonique. Seule la réponse permanente nous intéresse alors.

Méthode 1

Réponse forcée - solution particulière : On cherche une solution de (4-25) sous la forme :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = S_0 \omega \cos(\omega t + \phi) \text{ et } \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -S_0 \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

En injectant dans (4-25), on a :

$$\frac{2z\omega}{\omega_n} S_0 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} S_0 \sin(\omega t + \phi) + S_0 \sin(\omega t + \phi) = kE_0 \sin \omega t$$

$$\text{Posons: } (\omega t + \phi) = 0 \Rightarrow \omega t = -\phi$$

$$\Rightarrow \frac{2z\omega S_0}{\omega_n} = KE_0 \sin \omega t = -KE_0 \sin \phi \quad (4-26)$$

$$\text{Posons: } (\omega t + \phi) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega^2 S_0}{\omega_n^2} + S_0 = KE_0 \sin \omega t = -KE_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = -KE_0 \cos \phi \quad (4-27)$$

$$(4-26) \Rightarrow \sin \phi = -\frac{2z\omega S_0}{KE_0 \omega_n}$$

$$(4-27) \Rightarrow \cos \phi = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) S_0}{KE_0}$$

$$\Rightarrow \text{tg} \phi = -\frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow \phi = -\arctg\left(\frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

En élevant (4-26) et (4-27) au carré et en les additionnant, il vient :

$$\frac{4z^2 \omega^2}{\omega_n^2} S_0^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 S_0^2 = K^2 E_0^2$$

$$\Rightarrow S_0 = \frac{KE_0}{\sqrt{\left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

Finalement:

$s(t) = \frac{KE_0}{\sqrt{\left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} \sin(\omega t + \phi)$	
<p>avec : $\phi = -\arctg \frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$</p>	Déphasage
<p>et : $\frac{S_0}{E_0} = \frac{K}{\sqrt{\left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$</p>	Rapport d'amplitude.

Méthode 2

On cherche la solution permanente sous la même forme que précédemment $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \phi)$, en utilisant la notation exponentielle complexe (voir § 3).

$$\sin(\omega t + \phi) = \text{Im}(e^{j\omega t + \phi})$$

On écrit donc :

$$s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \phi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds(t)}{dt^2} = S_0 j \omega e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 s(t)}{dt} = -S_0 \omega^2 e^{j(\omega t + \phi)}$$

En remplaçant, dans (4-25),

$$\begin{aligned} & \frac{-S_0 \omega^2}{\omega_n^2} e^{j(\omega t + \phi)} + \frac{2S_0 z \omega}{\omega_n} e^{j(\omega t + \phi)} + S_0 e^{j(\omega t + \phi)} = k E_0 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow & \frac{-S_0 \omega^2}{\omega_n^2} e^{j\omega t} e^{j\phi} + \frac{2S_0 z \omega}{\omega_n} e^{j\omega t} e^{j\phi} + S_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} = k E_0 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow & \frac{2jz\omega}{\omega_n} S_0 e^{j\phi} + S_0 e^{j\phi} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} S_0 e^{j\phi} = k E_0 \\ \Rightarrow & S_0 e^{j\phi} = \frac{KE_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\omega z}{\omega_n}} \end{aligned} \quad (4-28)$$

Equation complexe. En égalant les modules :

$$\Rightarrow S_0 = \frac{KE_0}{\sqrt{\left(2z \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

et en égalant les arguments :

$$\phi = \arg \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2z\omega}{\omega_n} \right]$$

$$\Rightarrow \phi = -\arctg \frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Finalement:

$s(t) = \frac{KE_0}{\sqrt{(2z \frac{\omega}{\omega_n})^2 + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}} \sin(\omega t + \phi)$		
avec :	$\phi = -\arctg \frac{2z \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$	Déphasage
et :	$\frac{S_0}{E_0} = \frac{K}{\sqrt{(2z \frac{\omega}{\omega_n})^2 + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}}$	Rapport d'amplitude.

REMARQUE: il ne faut pas confondre l'angle ϕ (lors de la réponse d'un système du second ordre de $z < 1$ à un échelon) et l'angle Φ de déphasage lors d'une réponse harmonique. Ce dernier possède une grande importance et nous l'étudierons plus en détail dans le cours d'asservissements.

Chapitre 5

LA TRANSFORMATION DE LAPLACE.

«Mais papa, Einstein a dit...
- Fiches-moi la paix avec ton Einstein, je ne
veux pas d'ennuis avec les voisins.»

Fernand Raynaud

3-1 DÉFINITION

Soit f , une fonction réelle de la variable réelle t (On travaillera toujours en variable temporelle dans le cours d'asservissements) et définie pour $t > 0$:

On appelle transformée de Laplace de f , la fonction $F(p)$, définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \text{notée} \quad F(p) = L[f(t)] \quad (3-1)$$

avec p : variable complexe.

L'application L , de f vers F est la transformation de Laplace. Certaines conditions sur f sont nécessaires pour que la transformée existe. Elles seront toujours remplies dans les cas pratiques que nous rencontrerons.

3-2 PROPRIÉTÉS

3-2-1 UNICITÉ

A $f(t)$ correspond $F(p)$ unique et à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique. La correspondance entre une fonction et sa transformée de Laplace est biunivoque : on pourra déduire $F(p)$ de $f(t)$ et $f(t)$ de $F(p)$. Dans ce dernier cas, $f(t)$ est appelée la transformée inverse de $F(p)$:

$$F(p) = L[f(t)] \quad \text{et} \quad f(t) = L^{-1}[F(p)]$$

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$$

3-2-2 LINÉARITÉ

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions du temps transformables par Laplace. L'application L est linéaire, et vérifie donc le principe de superposition :

$$L[\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)] = \lambda \cdot L[f(t)] + \mu \cdot L[g(t)]$$

la transformation inverse est également linéaire :

$$L^{-1}[\lambda \cdot F(p) + \mu \cdot G(p)] = \lambda \cdot L^{-1}[F(p)] + \mu \cdot L^{-1}[G(p)]$$

3-2-3 IMAGE DE LA DÉRIVÉE

Ecrivons la transformée de la dérivée d'une fonction en utilisant (3-1) :

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

$$\text{On montre que : } L[f'(t)] = pF(p) - f(0^+) \quad (3-2)$$

Avec, limite à droite de $f(t)$ lorsque t tend vers zéro.

Ce résultat se généralise aux ordres supérieurs par récurrence :

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (3-3)$$

Dans le cas où la fonction f et ses dérivées sont nulles à l'instant zéro, on obtient le résultat fondamental :

$$\boxed{\begin{array}{l} L[f'(t)] = p \cdot F(p) \\ L[f''(t)] = p^2 \cdot F(p) \\ \dots\dots\dots \\ L[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot F(p) \end{array}} \quad (3-4)$$

Ce cas se rencontre très souvent en asservissements et correspond à l'étude du comportement d'un système initialement au repos et soumis à une entrée causale c.a.d. nulle pour $t < 0$.

Pour une fonction causale, la transformation de Laplace remplace une dérivation par un produit.

De la même manière, l'intégration est remplacée par une division par p .

Conséquence: Une équation différentielle en t est transformée par Laplace en équation algébrique en p , qui est beaucoup plus facile à résoudre. Pratiquement, le passage en variable de Laplace s'effectuera au moyen d'une table, puis à l'issue du calcul algébrique, le retour en variable temporelle s'effectuera au moyen de la même table après une décomposition éventuelle en éléments simples.

3-2-4 THÉORÈME DU RETARD.

Soit une fonction $f(t)$ de transformée $F(p)$ et une fonction $g(t) = f(t-T)$.
 $g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée d'un temps T . (voir Fig. 5.1)

La transformée de Laplace de $g(t)$ est :

$$\boxed{L[g(t)] = G(p) = e^{-Tp} F(p)} \quad (3-5)$$

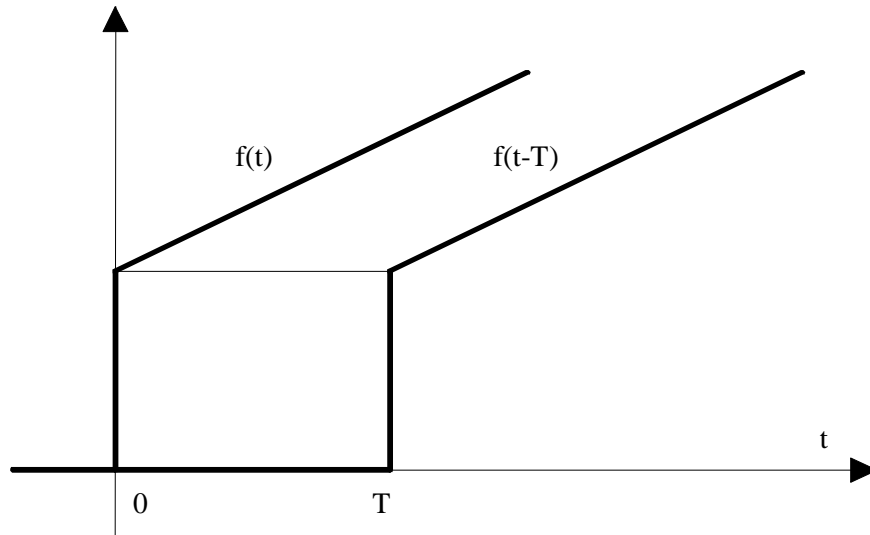


Figure 3.1 : Fonction retardée.

3-2-5 THÉORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE.

Ces deux théorèmes permettent, connaissant la transformée de Laplace, de déterminer la valeur aux limites de la fonction temporelle sans avoir à calculer la transformée inverse.

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)} \quad (3-6)$$

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)} \quad (3-7)$$



Le théorème de la valeur finale (3-6) n'est valide que si tous les pôles de $pF(p)$ (qui est une fraction rationnelle) ont leur partie réelle négative. Nous montrerons dans le cours d'asservissements que des pôles à partie réelle positive ou nulle caractérisent un système instable : la grandeur de sortie est alors, par exemple, divergente et la valeur finale n'a pas de sens.

3-3 TRANSFORMÉES USUELLES

3-3-1 FONCTION IMPULSION UNITAIRE (DE DIRAC).

C'est une fonction du temps (ou, plus précisément, une limite de fonction) de durée extrêmement courte mais d'amplitude suffisante pour provoquer un effet notable. Elle est usuellement notée $\delta(t)$. On peut la considérer comme la limite lorsque λ tend vers l'infini, d'un rectangle d'aire = 1, de hauteur λ et de largeur $1/\lambda$ (voir figure suivante).

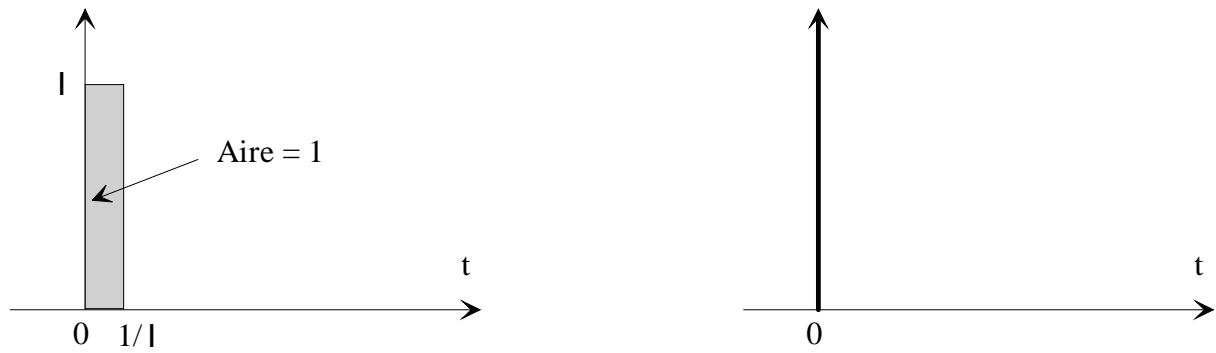


Figure 3.2 : Impulsion de Dirac.

Sa transformée est :

$$\boxed{L[\delta(t)] = 1} \quad (3-8)$$

La réponse d'un système à une telle fonction est appelée **réponse impulsionnelle**.

3-3-2 FONCTION ECHELON UNITAIRE (OU FONCTION DE HEAVISIDE).

Elle est usuellement notée $u(t)$ et est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 & \forall t > 0 \\ u(t) &= 0 & \forall t \leq 0 \end{aligned}$$

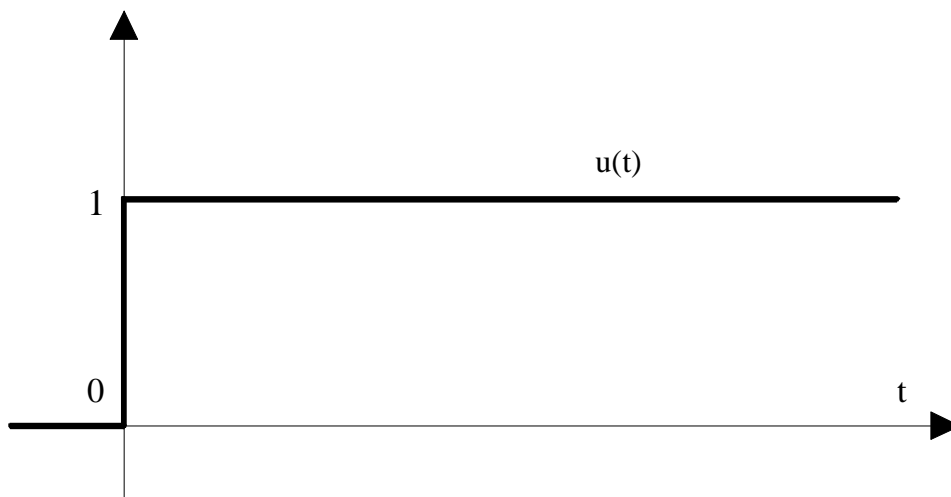


Figure 3.3 : Echelon de Heaviside.

Sa transformée est :

$$\boxed{L[u(t)] = \frac{1}{p}} \quad (3-9)$$

La réponse d'un système à une telle fonction est appelée **réponse indicielle**.

3-3-3 FONCTION RAMPE UNITAIRE (OU ÉCHELON DE VITESSE).

La fonction rampe est définie comme étant $e(t) = t.u(t)$
 Une rampe de pente a sera la fonction $e(t) = a.t.u(t)$

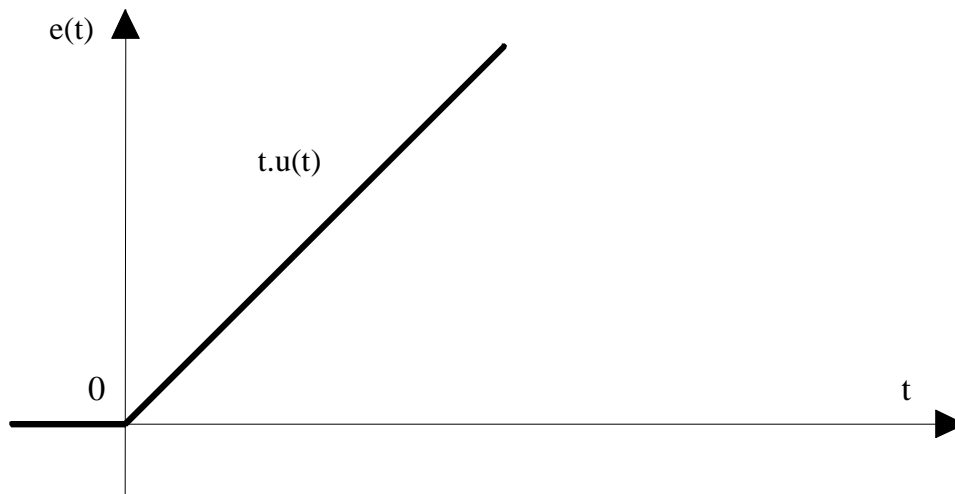


Figure 3.4 : Fonction rampe.

Sa transformée de Laplace est : $\boxed{L[t.u(t)] = \frac{1}{p^2}}$

REMARQUE 1 : La réponse d'un système linéaire à une rampe est l'intégrale de sa réponse à un échelon.

REMARQUE 2 : Les trois fonctions que nous avons considérées sont nulles pour $t < 0$. Elles sont dites **causales**, l'effet provoqué par elles ne commençant qu'après l'instant zéro.

3-3-4 AUTRES FONCTIONS : TABLES DE TRANSFORMÉES.

TABLEAU 1 : Transformées élémentaires.

F(p)	f(t) pour t > 0
1	$\delta(t)$ (impulsion)
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ (échelon)
$\frac{1}{p^2}$	t (rampe)
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{1+Tp}$	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{(1+Tp)^2}$	$\frac{1}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{(1+Tp)^n}$	$\frac{1}{T^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
$\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-z^2} t$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(1+Tp)}$	$\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \left[\frac{\omega T e^{-\frac{t}{T}}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} + \sin(\omega t + \phi) \right]$ avec : $\phi = -\arctg(T\omega)$
$\frac{ap+\beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$A e^{-at} \sin(\omega t + \phi)$ $A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a\alpha)^2}; \phi = -\arctg\left(\frac{\alpha\omega}{\beta - a\alpha}\right)$

TABEAU 2 : Transformées usuelles en asservissements.Réponses $s(t)$ de systèmes d'ordre 1 et 2 à un échelon unitaire : $e(t) = u(t)$

SYSTEME	F(p)	s(t) pour $t > 0$
Ordre 1	$\frac{1}{p(1+Tp)}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
Ordre 2, $z = 1$	$\frac{1}{p(1+Tp)^2}$	$1 - \frac{t+T}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
Ordre 2, $z > 1$	$\frac{1}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$	$1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
Ordre 2, $z < 1$ *	$\frac{1}{p \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$	$1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \left[\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \arctg \left(\frac{-\sqrt{1-z^2}}{-z} \right) \right]$

- ou bien $s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \left[\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \arctg \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right) \right]$ avec détermination naturelle de la fonction Arctg.

Réponses $s(t)$ de systèmes d'ordre 1 et 2 à une rampe unitaire : $e(t) = t.u(t)$

SYSTEME	F(p)	s(t) pour $t > 0$
Ordre 1	$\frac{1}{p^2(1+Tp)}$	$t - T + T e^{-\frac{t}{T}}$
Ordre 2, $z = 1$	$\frac{1}{p^2(1+Tp)^2}$	$t - 2T + (t + 2T) e^{-\frac{t}{T}}$
Ordre 2, $z > 1$	$\frac{1}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$	$t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_2^2 e^{-\frac{t}{T_2}} - T_1^2 e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$
Ordre 2, $z < 1$	$\frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)}$	$t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \left[\omega_n \sqrt{1-z^2} t + 2\arctg \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right) \right]$

REMARQUE : les polynômes du second ordre $\left(1 + \frac{2z}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2 \right)$ ont été notés sous leur forme factorisée dans les réels $(1+Tp)^2$ ou $(1+T_1p)(1+T_2p)$ excepté pour le cas où $z < 1$ pour lequel la factorisation est impossible dans les réels (factorisation dans les complexes).

5-4 APPLICATION A LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Dans les exemples qui suivent et à titre démonstratif, on utilisera les transformées élémentaires du tableau 1 : la décomposition en éléments simples est alors indispensable. En pratique, on lirait directement dans un tableau plus complet, comme le tableau 2, les transformées inverses : le calcul est alors réduit à son strict minimum.

REMARQUE: Par souci de simplification, les sorties $s(t)$ calculées sont exprimées sous forme de fonctions classiques. En réalité, les entrées appliquées sont des fonctions causales et pour être rigoureux il faudrait les écrire également sous forme de fonctions causales, soit $s(t).u(t)$

5-4-1 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Nous avons vu au chapitre 4 q'un système du premier ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (4-3) \quad (5-10)$$

5-4-1-1 Système soumis à une entrée échelon.

L'entrée échelon s'écrit : $e(t) = E_0 u(t)$ échelon d'amplitude E_0
L'équation (5-10) se réécrit :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE_0 \cdot u(t) \quad (5-11)$$

Si le système part du repos, la fonction sortie $s(t)$ est nulle ainsi que ses dérivées. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (5-11) on trouve :

$$\begin{aligned} s(t) &\xrightarrow{L} S(p) \\ \frac{ds(t)}{dt} &\xrightarrow{L} pS(p) \quad (\text{Théorème de la dérivation}) \\ u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{p} \quad (\text{ voir table des transformées}) \end{aligned}$$

L'équation (5-11) devient, en variable de Laplace : $TpS(p) + S(p) = K \frac{E_0}{p}$

La résolution est alors très simple et il vient :

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1 + Tp)}$$

La fonction sortie est exprimée sous la forme d'une fraction rationnelle en p , que l'on va décomposer en éléments simples pour obtenir la solution recherchée $s(t)$ par transformation de Laplace inverse.

Comme indiqué dans la remarque préalable, on pourrait lire directement le résultat final dans la première ligne du tableau 2.

On obtient : (voir § 3-2-3-1)

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+Tp)} = \frac{KE_0}{p} - \frac{KTE_0}{(1+Tp)} = KE_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp} \right]$$

Effectuons la transformation inverse (qui, rappelons-le, est linéaire) :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = L^{-1} \left[KE_0 \left(\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp} \right) \right] = KE_0 \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{p} \right] - KE_0 T \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{1+Tp} \right]$$

Les transformées inverses de $\frac{1}{p}$ et de $\frac{1}{1+Tp}$ sont lues directement dans le tableau 1 ;

on obtient :

$$s(t) = KE_0(u(t)) - KE_0 T \left(\frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T} \right)$$

et finalement :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

5-4-1-2 Système soumis à une entrée rampe.

L'entrée rampe s'écrit : $e(t) = a.t.u(t)$ rampe de pente a

L'équation (5-10) se réécrit :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ka.t.u(t) \quad (5-12)$$

Si le système part du repos, la fonction sortie $s(t)$ est nulle ainsi que ses dérivées. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (5-12) on trouve :

$$s(t) \xrightarrow{L} S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{L} pS(p) \quad (\text{Théorème de la dérivation})$$

$$t.u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2} \quad (\text{ voir tableau 1})$$

L'équation (5-12) devient, en variable de Laplace :

$$TpS(p) + S(p) = K \frac{a}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{K.a}{p^2(1+Tp)}$$

Après décomposition en éléments simples, on obtient : (voir § 3-2-3-2)

$$S(p) = \frac{Ka}{p^2(1+Tp)} = \frac{Ka}{p^2} - \frac{KaT}{p} + \frac{KaT^2}{(1+Tp)} = Ka \left[\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{1+Tp} \right]$$

Effectuons la transformation inverse :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = Ka.L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] - T.L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + Ka.T^2.L^{-1}\left[\frac{1}{1+Tp}\right]$$

$$\Rightarrow s(t) = Ka.t - KaT(u(t)) + T^2 \left(\frac{e^{-\frac{t}{T}}}{T} \right)$$

et finalement :

$$s(t) = K.a \left(t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

5-4-1-3 Système soumis à une entrée Harmonique.

En asservissements, l'étude de la réponse à une entrée Harmonique s'effectuera différemment. Le calcul suivant est donc purement démonstratif.

L'entrée Harmonique s'écrit : $e(t) = E_0 \sin \omega t$ sinusoïde d'amplitude E_0
L'équation (5-10) se réécrit :

$$T \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = KE_0 \sin \omega t \quad (5-13)$$

Si le système part du repos, la fonction sortie $s(t)$ est nulle ainsi que ses dérivées. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (5-13) on trouve :

$$s(t) \xrightarrow{L} S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{L} pS(p) \quad (\text{Théorème de la dérivation})$$

$$\sin \omega t \xrightarrow{L} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (\text{ voir tableau 1})$$

L'équation (5-13) devient, en variable de Laplace :

$$TpS(p) + S(p) = KE_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow S(p) = \frac{KE_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

Après décomposition en éléments simples, on obtient : (voir § 3-2-3-10)

$$S(p) = KE_0 \left[\frac{\omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)} \right] = KE_0 \left[\frac{T^2 \omega}{1 + T^2 \omega^2} \left(\frac{1}{1 + Tp} \right) + \frac{\omega}{(1 + T^2 \omega^2)} \left(\frac{1 - Tp}{p^2 + \omega^2} \right) \right]$$

Effectuons la transformation inverse :

$$\frac{1}{1 + Tp} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\frac{1 - Tp}{(p^2 + \omega^2)} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{\omega} \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{avec : } \phi = \arctg(-T\omega)$$

$$\text{Forme : } \frac{\alpha p + \beta}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad \text{avec : } \alpha = -T\beta = 1a = 0$$

$$s(t) = KE_0 \left[\frac{T^2 \omega}{1 + T^2 \omega^2} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{\omega}{(1 + T^2 \omega^2)} \frac{1}{\omega} \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \sin(\omega t + \phi) \right]$$

et finalement :

$$s(t) = \frac{KE_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \left[\frac{\omega T e^{-\frac{t}{T}}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} + \sin(\omega t + \phi) \right]$$

avec : $\phi = -\arctg(T\omega)$

5-4-2 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE.

Nous avons vu au chapitre 4 qu'un système du second ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t) \quad (4-10) \quad (5-14)$$

5-4-2-1 Système soumis à une entrée échelon.

L'entrée échelon s'écrit : $e(t) = E_0 u(t)$ échelon d'amplitude E_0
 L'équation (5-14) se réécrit :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K E_0 \cdot u(t) \quad (5-15)$$

Si le système part du repos, la fonction sortie $s(t)$ est nulle ainsi que ses dérivées. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (5-15) on trouve :

$$\begin{aligned} s(t) &\xrightarrow{L} S(p) \\ \frac{ds(t)}{dt} &\xrightarrow{L} pS(p) \quad (\text{Théorème de la dérivation}) \\ \frac{d^2 s(t)}{dt^2} &\xrightarrow{L} p^2 S(p) \quad (\text{idem}) \\ u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{p} \quad (\text{voir tableau 1}) \end{aligned}$$

L'équation (5-15) devient, en variable de Laplace :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2z}{\omega_n} pS(p) + S(p) &= K \frac{E_0}{p} \\ \Rightarrow S(p) \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2zp}{\omega_n} + 1 \right) &= K \frac{E_0}{p} \\ \Rightarrow S(p) &= \frac{K E_0}{p \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2zp}{\omega_n} + 1 \right)} \quad (5-16) \end{aligned}$$

Nous avons maintenant au dénominateur, un trinôme du second degré dont les racines sont deux des trois pôles de la fraction rationnelle $S(p)$. La transformation inverse conduisant à $s(t)$ ne donne pas le même résultat suivant que ces pôles sont réels ou complexes. Il existe trois cas (que nous avons détaillés dans l'exemple du § 3-1-2) que nous allons considérer successivement :

Cas 1 : racines réelles distinctes.

Les trois pôles de $S(p)$ sont : $0, -\omega_n \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)$ et $-\omega_n \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$
 De la même manière qu'au § 3-1-2, nous introduisons :

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_n \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)}$$

qui permettent de réécrire (5-16) sous la forme :

$$\Rightarrow S(p) = \frac{KE_0}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

On peut maintenant décomposer $S(p)$ en éléments simples : (voir § 3-2-3-6)

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} = KE_0 \left[\frac{1}{p} + \frac{T_1^2}{T_2 - T_1} \left(\frac{1}{1+T_1p} \right) - \frac{T_2^2}{T_2 - T_1} \left(\frac{1}{1+T_2p} \right) \right]$$

d'où on déduit la transformée inverse :

$$s(t) = KE_0 + \frac{KE_0}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right]$$

Cas 2 : racines réelles confondues.

Les trois pôles de $S(p)$ sont : 0 , $-\frac{1}{\omega_n}$ double

En posant $T = -\frac{1}{\omega_n}$ (5-16) se réécrit :

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+Tp)^2}$$

La décomposition en éléments simples donne : (voir § 3-2-3-3)

$$S(p) = \frac{KE_0}{p(1+Tp)^2} = KE_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp} - \frac{T}{(1+Tp)^2} \right]$$

qui permet de déterminer la transformée inverse :

$$s(t) = KE_0 \left[1 - e^{\frac{-t}{T}} - \frac{t}{T} e^{\frac{-t}{T}} \right]$$

Cas 3 : racines complexes conjuguées.

Les trois pôles de $S(p)$ sont : 0 , $-z\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-z^2}$, $-z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2}$

$S(p)$ se réécrit :

$$S(p) = \frac{KE_0 \omega_n^2}{p(\omega_n^2 + 2z\omega_n p + p^2)} = \frac{KE_0 \omega_n^2}{p(p + z\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-z^2})(p + z\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-z^2})}$$

Que l'on peut également mettre sous la forme suivante ? (voir § 3-1-2)

$$S(p) = \frac{KE_0 \omega_n^2}{p \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2 \right]}$$

La décomposition en éléments simples donne : (voir § 3-2-3-8)

$$S(p) = \frac{KE_0 \omega_n^2}{p \left[(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2 \right]} = KE_0 \left[\frac{1}{p} + \frac{-p - 2z\omega_n}{(p + z\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-z^2})^2} \right]$$

Qui nous permet d'effectuer la transformation inverse.

Le second terme de la décomposition est de la forme :

$$\frac{\alpha p + \beta}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad \text{avec : } \alpha = -1, \beta = -2z\omega_n, a = z\omega_n \text{ et } \omega = \omega_n \sqrt{1-z^2}$$

Ce qui donne, en appliquant la formule de transformation correspondante du tableau 1 :

$$Ae^{-at} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} \sqrt{\omega_n^2(1-z^2) + z^2 \omega_n^2} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\text{et : } \varphi = \arctg \frac{\alpha \omega}{\beta - a\alpha} = \arctg \frac{-\omega_n \sqrt{1-z^2}}{-2z\omega_n + z\omega_n} = -\arctg \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

La réponse temporelle est finalement :

$$s(t) = KE_0 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi) \right]$$

avec : $\varphi = \arctg \frac{-\sqrt{1-z^2}}{-z}$

5-4-2-2 Système soumis à une entrée rampe.

L'entrée rampe s'écrit : $e(t) = a.t.u(t)$ rampe de pente a

L'équation (5-14) se réécrit :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Kat.u(t) \quad (5-17)$$

Si le système part du repos, la fonction sortie $s(t)$ est nulle ainsi que ses dérivées. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (5-17) on trouve :

$$s(t) \xrightarrow{L} S(p)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \xrightarrow{L} pS(p) \quad (\text{Théorème de la dérivation})$$

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} \xrightarrow{L} p^2 S(p) \quad (\text{idem})$$

$$t.u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p^2} \quad (\text{ voir tableau 1 des transformées})$$

L'équation (5-17) devient en variable de Laplace :

$$\frac{1}{\omega_n^2} p^2 S(p) + \frac{2z}{\omega_n} pS(p) + S(p) = K \frac{a}{p^2}$$

$$\Rightarrow S(p) \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2zp}{\omega_n} + 1 \right) = K \frac{a}{p^2}$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{K.a}{p^2 \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2zp}{\omega_n} + 1 \right)} \quad (5-18)$$

$S(p)$ possède quatre pôles et, comme dans le cas précédent, la résolution est différente suivant que les pôles sont réels ou complexes.

Cas 1 : racines réelles distinctes.

Les quatre pôles de $S(p)$ sont :

$$0: \text{pôle double}, -\omega_n \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) \text{ et } -\omega_n \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

De la même manière qu'au § 3-1-2, nous introduisons :

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(z - \sqrt{z^2 - 1})} \text{ et } T_2 = \frac{1}{\omega_n(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

qui permettent de réécrire (5-18) sous la forme :

$$\Rightarrow S(p) = \frac{K.a}{p^2(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

Après décomposition en éléments simples, il vient : (voir § 3-2-3-7)

$$S(p) = \frac{K.a}{p^2(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = K.a \left[-\frac{T_1 + T_2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{T_1^3}{T_1 - T_2(1 + T_1 p)} + \frac{T_2^3}{T_2 - T_1(1 + T_2 p)} \right]$$

La transformation inverse donne le résultat :

$$s(t) = K.a \left[t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left[T_2^2 e^{\frac{-t}{T_2}} - T_1^2 e^{\frac{-t}{T_1}} \right] \right]$$

Cas 2 : racines réelles confondues.

Les quatre pôles de S(p) sont :

0 : pôle double et $-\frac{1}{\omega_n}$ pôle double

En posant $T = -\frac{1}{\omega_n}$ (5-18) se réécrit :

$$S(p) = \frac{K.a}{p^2(1 + Tp)^2}$$

La décomposition en éléments simples donne : (voir § 3-2-3-4)

$$S(p) = \frac{K.a}{p^2(1 + Tp)^2} = K.a \left[-\frac{2T}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2T^2}{1 + Tp} + \frac{T^2}{(1 + Tp)^2} \right]$$

et, après transformation inverse :

$$s(t) = K.a \left[t - 2T + (t + 2T)e^{\frac{-t}{T}} \right]$$

Cas 3 : racines complexes conjuguées.

Les quatre pôles de $S(p)$ sont : 0 double; $-z\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-z^2}$; $-z\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-z^2}$

$S(p)$ se réécrit :

$$S(p) = \frac{K.a\omega_n^2}{p^2(p+z\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-z^2})(p+z\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-z^2})} = \frac{K.a\omega_n^2}{p^2(\omega_n^2+2z\omega_n p+p^2)}$$

Que l'on peut également mettre sous la forme : (voir § 3-1-2)

$$S(p) = \frac{K.a\omega_n^2}{p^2[(p+z\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-z^2})^2]}$$

La décomposition en éléments simples donne : (voir § 3-2-3-9)

$$S(p) = \frac{K.a\omega_n^2}{p^2[(p+z\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-z^2})^2]} = K.a \left[\frac{-2z}{\omega_n} \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\frac{2z}{\omega_n}p+(4z^2-1)}{(p+z\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-z^2})^2} \right]$$

Le dernier membre de la décomposition est de la forme : $\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}$

avec: $\alpha = \frac{2z}{\omega_n}$; $\beta = 4z^2 - 1$; $a = z\omega_n$; $\omega = \omega_n\sqrt{1-z^2}$

En appliquant les formules du tableau 1, il vient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2\omega^2 + (\beta - a\alpha)^2} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-z^2}} \sqrt{\frac{4z^2}{\omega_n^2} \omega_n^2(1-z^2) + \left(4z^2 - 1 - \frac{2z^2\omega_n}{\omega_n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-z^2}} \sqrt{4z^2(1-z^2) + (2z^2 - 1)^2} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-z^2}} \sqrt{4z^2 - 4z^4 + 4z^4 - 4z^2 + 1} \end{aligned}$$

on trouve donc : $A = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-z^2}}$

d'autre part :

$$\varphi = \arctg \frac{\alpha\omega}{\beta - a\alpha} = \arctg \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{4z^2 - 1 - 2z^2} = -\arctg \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{1 - 2z^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha p + \beta}{(p+a)^2 + \omega^2}\right] = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi)$$

En complétant la transformation inverse, il vient finalement :

$$s(t) = K.a \left[t - \frac{2z}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-z^2} t + \varphi) \right]$$

avec : $\varphi = -\arctg \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2}$

REMARQUE: La forme mathématique de l'angle φ n'est pas la même que celle donnée dans le tableau 2, mais on montre facilement qu'elles sont équivalentes :

prenons la tangente de $2\arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right) = 2a$ c'est une forme $tg 2a = \frac{2tga}{1-tg^2 a}$

cette tangente est égale à :
$$\frac{2tg\left[\arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right]}{1-tg^2\left[\arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right]} = \frac{2\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}}{1-\frac{1-z^2}{z^2}} = \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2-1}$$

et finalement :
$$2\arctg\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right) = -\arctg\left(\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{1-2z^2}\right)$$

5-4-2-3 Système soumis à une entrée harmonique.

Dans ce cas particulier l'étude, bien que faisant appel à la formalisation de Laplace, s'effectue d'une manière différente comme nous le verrons dans le cours d'asservissements. L'utilisation d'une propriété de la fonction de transfert permettra l'obtention rapide du rapport d'amplitude et de la phase qui sont les deux grandeurs qui nous intéressent.

Chapitre 6

ANNEXES.

«Tous les Crétois sont des menteurs.»

Epiménide le Crétois

6-1 TEMPS DE REPONSE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE.

6-1-1. RAPPEL

Le temps de réponse à 5% est défini comme étant, pour un système soumis à une entrée échelon, le temps que met le signal de sortie à rester dans une zone comprise entre plus ou moins 5% de la valeur atteinte en régime permanent.

* Dans le cas d'une réponse non oscillante ($z > 1$), ce sera le temps que met la sortie à atteindre 0.95 fois la valeur atteinte en régime permanent.

* Dans le cas d'une réponse oscillante ($z < 1$), ce sera le temps que met la sortie à rester définitivement comprise entre 0.95 et 1.05 fois la valeur atteinte en régime permanent.

Nous connaissons l'expression de la réponse d'un système du second ordre à une entrée échelon. Dans tout ce qui suit, nous nous mettrons dans le cas d'une entrée échelon unitaire:

* Lorsque $z < 1$:
$$s(t) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \phi) \right]$$

* Lorsque $z > 1$:
$$s(t) = K \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right) \right]$$

avec:
$$T_1 = \frac{1}{\omega_n(z - \sqrt{z^2 - 1})} \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_n(z + \sqrt{z^2 - 1})}$$

* Lorsque $z = 1$:
$$s(t) = K \left[1 - e^{\frac{-t}{T}} \left(\frac{t}{T} + 1 \right) \right] \quad \text{avec : } T = \frac{1}{\omega_n}$$

Dans les trois cas, la valeur atteinte en régime permanent est K.

Il faut effectuer une étude séparée pour les trois cas. On considérera que le cas $z = 1$ correspond à la limite du cas $z > 1$: voyons les deux cas restants.

6-1-2. ETUDE EN REGIME APERIODIQUE.

Lorsque $z > 1$, la réponse est:
$$s(t) = K \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right) \right] \quad \text{non oscillante.}$$

L'écart Δ entre la sortie et la valeur atteinte en régime permanent est:

$$\Delta(t) = K - s(t) = K - K \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left(T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right) \right] = \frac{K}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{\frac{-t}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-t}{T_2}} \right)$$

La réponse étant régulière, $Tr_{5\%}$ est le temps au bout duquel $\Delta = 0.05K$ (Temps à partir duquel la réponse entre dans la zone ombrée sur la Fig 6-1)

Tr5% est finalement défini par:

$$\Delta(\text{Tr}5\%) = 0.05K \Rightarrow \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{\frac{-\text{Tr}5\%}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-\text{Tr}5\%}{T_2}} \right) = 0.05$$

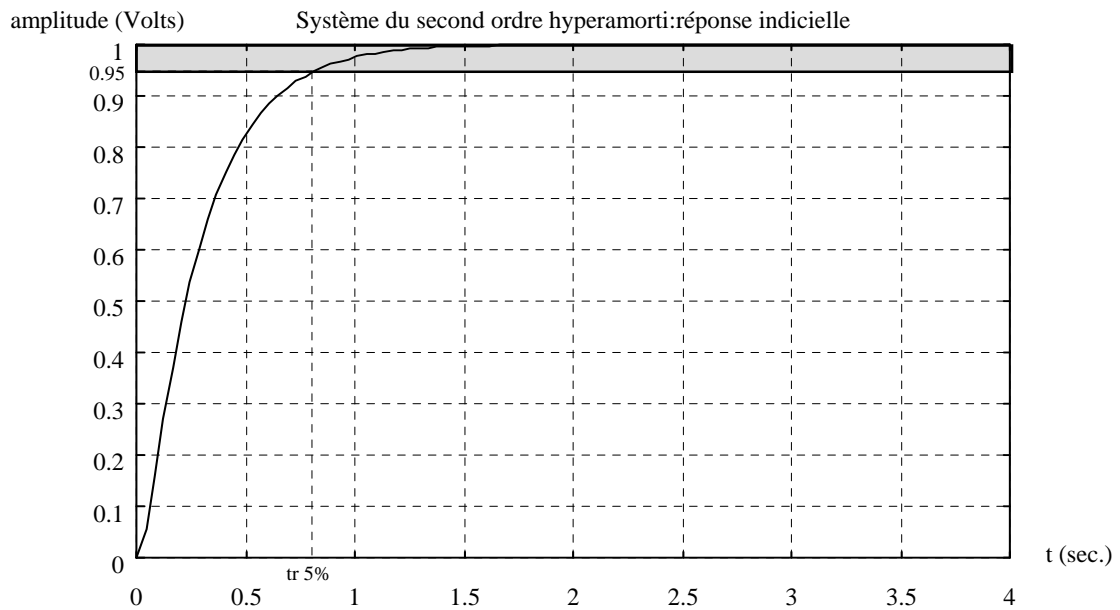


Fig 6-1: réponse indicielle d'un système du second ordre avec: $K = 1$; $z = 1,5$ et $\omega_n = 10\text{rd/s}$

6-1-3. ETUDE EN REGIME PERIODIQUE.

Lorsque $z < 1$: $s(t) = K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \phi) \right]$ réponse périodique.

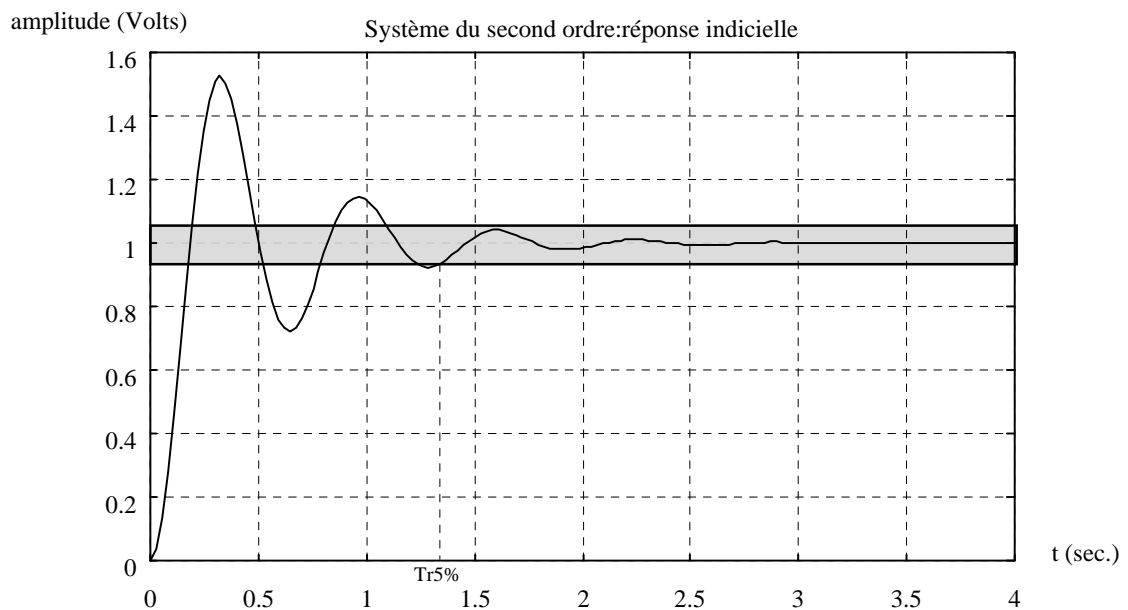


Fig 6-2: réponse indicielle d'un système du second ordre avec: $K = 1$; $z = 0,2$ et $\omega_n = 10\text{rd/s}$

Tr5% est le temps que met la réponse à être définitivement comprise entre 0.95K et 1.05K: (zone ombrée sur la Fig 6-2). L'écart Δ entre la sortie et la valeur atteinte en régime permanent est:

$$\Delta(t) = K - K \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi) \right] = -\frac{K}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n t + \varphi)$$

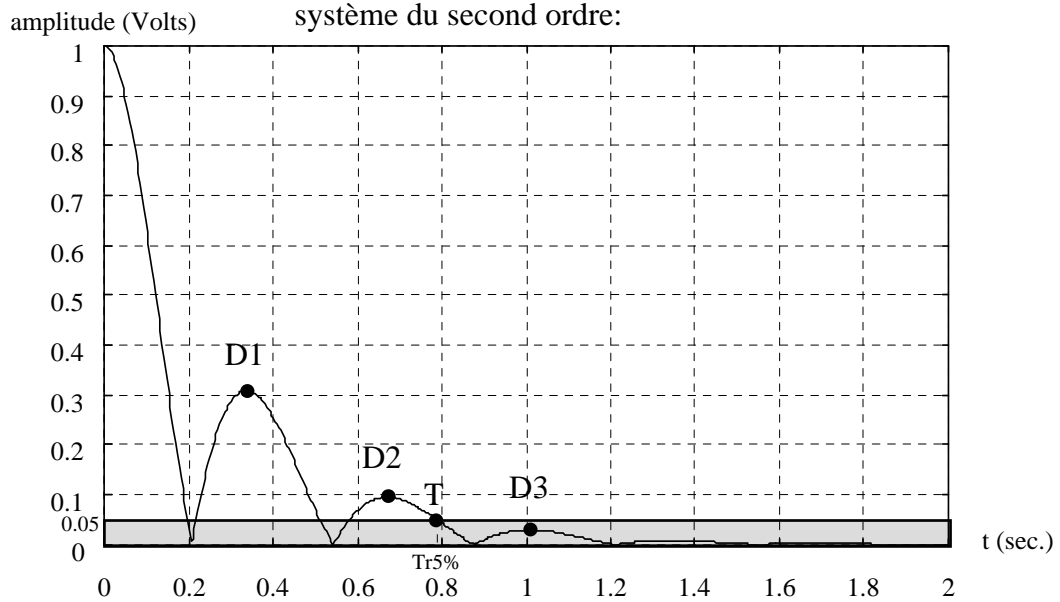


Fig 6-3: Valeur absolue de l'écart: $|\Delta(t)|$ pour un système du second ordre $K=1$, $\omega_n=10$ et $z=0.35$

Tr5% est défini par: $|\Delta(Tr5\%)| < 0.05K$ (temps que met la réponse à atteindre définitivement la zone ombrée sur la Fig 6-3).

Tr5% est finalement défini par:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n Tr5\%} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n Tr5\% + \varphi) \right| < 0.05$$

6-1-4. DETERMINATION NUMERIQUE DE Tr 5%.

La détermination analytique de Tr5% n'est pas possible à priori: d'une part, il dépend de deux paramètres z et ω_n et d'autre part les équations sont non linéaires. On a donc recours à une méthode numérique que l'on peut implanter sur n'importe quel langage de programmation permettant le calcul itératif du produit $Tr \cdot \omega_n$: temps de réponse réduit.

Cas ou $z > 1$: Pour $\omega_n=1$ et pour chaque valeur de z : (z variant de 1 à 10)

On calcule l'écart pour des valeurs croissantes de t en partant de 0 jusqu'à ce que:

$$\Delta(t) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left(T_1 e^{\frac{-Tr5\%}{T_1}} - T_2 e^{\frac{-Tr5\%}{T_2}} \right) = 0.05$$

Le temps correspondant est Tr 5%.

Cas ou $z < 1$: Pour $\omega_n = 1$ et pour chaque valeur de z : (z variant de 0 à 0.99)

La stratégie retenue est la suivante:

- a) On calcule la valeur de la sortie pour chaque demi période en partant de la première (calculs successifs de D1, D2, etc. sur la Fig 6-3), ceci pour atteindre la zone de Tr5% plus rapidement.
- b) On stoppe le calcul dès que l'on est à l'intérieur de la zone ombrée (point D3).

c) on repart en arrière jusqu'à ce que: $\left| \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n \text{Tr}5\%} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n \text{Tr}5\% + \phi) \right| = 0.05$

(point T): Le temps correspondant est Tr5%

Le programme correspondant sur logiciel de calcul MATLAB est donné page suivante.

L'évolution du temps de réponse réduit est donnée ci-dessous:

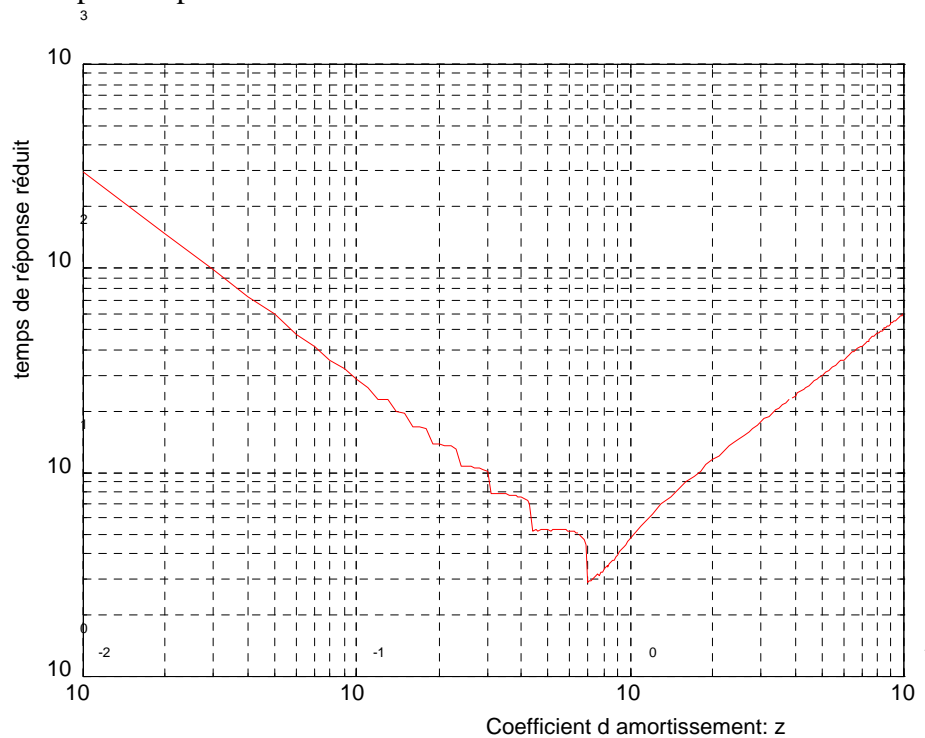


Fig 6-4: Temps de réponse réduit d'un système du second ordre.

On remarque que l'évolution est linéaire pour les valeurs faibles et pour les valeurs fortes de z . ceci peut se confirmer par un calcul approché:

cas ou z est grand: $\sqrt{z^2 - 1} \approx \sqrt{z^2} = z$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n (z - \sqrt{z^2 - 1})} = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})}{\omega_n [z^2 - (z^2 - 1)]} = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})}{\omega_n} \approx \frac{2z}{\omega_n}$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_n (z + \sqrt{z^2 - 1})} \approx \frac{1}{2z\omega_n} \quad \text{tend vers 0 lorsque } z \text{ augmente}$$

Le système se comporte donc comme un système du premier ordre de constante de temps T_1 .

Son temps de réponse est $Tr_{5\%} = 3T_1 = \frac{6z}{\omega_n}$

On vérifie que, pour les grandes valeurs de z , la courbe Fig 6-4 est une droite passant par les points (5, 30) et (10, 60) de pente $\frac{60-30}{10-5} = 6$. $Tr \cdot \omega_n = 6z$

cas ou z est petit: $z \approx 0$

Le système oscille beaucoup avant de rester définitivement dans la zone des 5%. On peut faire l'approximation que le temps de réponse est donné par l'exponentielle ce qui induit une erreur inférieure à 1/2 période. La décroissance étant faible (z dans l'exponentielle), le temps de réponse est grand devant 1/2 période. sur la courbe Fig 6-5, on constate que le temps de réponse ainsi approximé est la verticale de l'intersection de l'exponentielle avec la zone ombrée (3s) et est proche du temps de réponse vrai $Tr_{5\%}$.

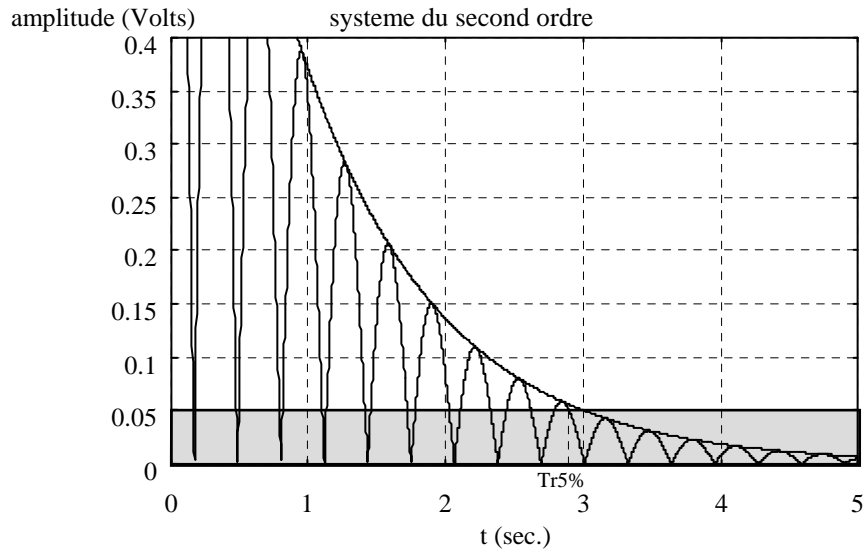


Fig 6-5: Valeur absolue de l'écart pour $z = 0.1$ et $\omega_n = 10$ rd/s.

Le temps de réponse vrai est défini par:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n Tr_{5\%}} \sin(\sqrt{1-z^2} \omega_n Tr_{5\%} + \phi) \right| < 0.05$$

Qui peut être approximé par:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n Tr_{5\%}} \approx e^{-z\omega_n Tr_{5\%}} = 0.05 \Rightarrow -z\omega_n Tr_{5\%} = \ln(0.05) = -3$$

$$\Rightarrow \omega_n Tr_{5\%} = \frac{3}{z}$$

On le vérifie sur la courbe Fig 6-4 pour les valeurs faibles de z : points (0.01, 300) et (0.03, 100) par exemple.

Cas ou la valeur de z est intermédiaire: l'évolution du temps de réponse réduit est complexe avec des discontinuités: ces dernières s'expliquent de la manière suivante:

lorsque la réponse est tangente au contour limite (cas de la Fig 6-6), le temps de réponse correspond à l'abscisse du point de tangence: $Tr = 0,7$ s.

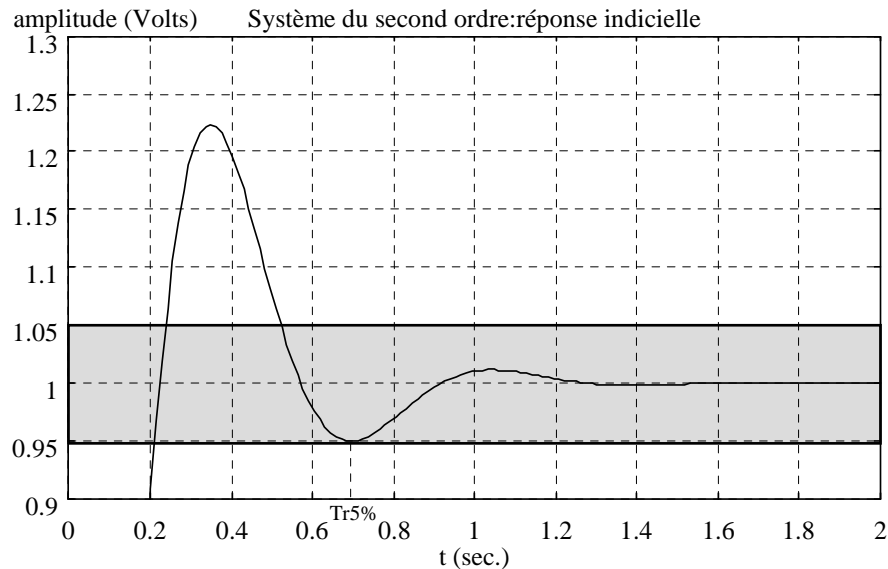


Fig 6-6: Temps de Réponse pour $z = 0.43$ et $\omega_n = 10$ rd/s

Une augmentation très faible de z rend la réponse non tangente en ce point et le temps de réponse diminue brusquement: $Tr = 0,5$ s (voir Fig 6-7)

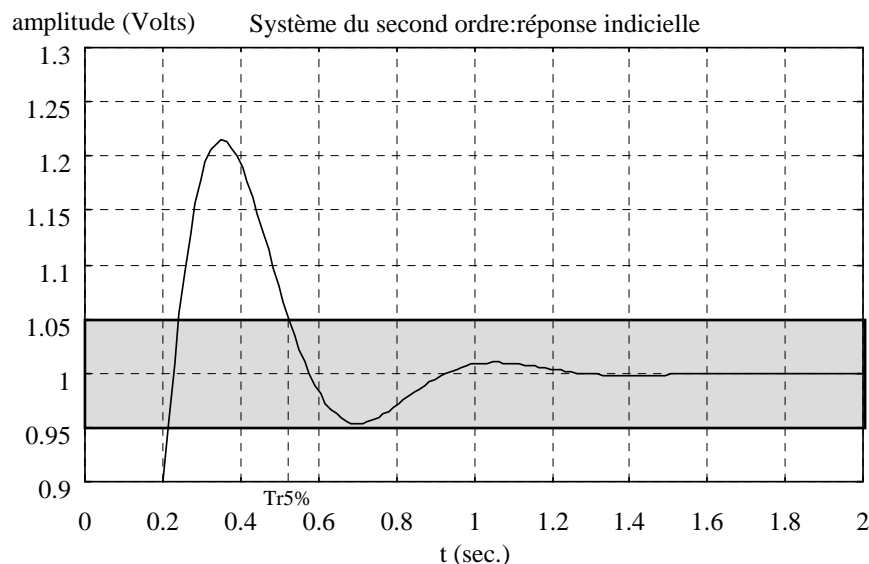


Fig 6-7: Temps de Réponse pour $z = 0.44$ et $\omega_n = 10$ rd/s

Cette variation brutale explique le saut $Tr_{\omega_n=5}$ à $Tr_{\omega_n=7}$ autour de $z = 0.43$ sur la Fig 6-4

Exemple de programme de détermination du temps de réponse réduit (MATLAB):

Remarque: ω est ω_n ,

```
*****
o=1
n=1
%   calcul pour z inférieur à 1 (compris entre 0 et 0.99)
z=0
while z<0.99
    z=z+0.01
    s=sqrt(1-z*z)
    phi=atan(s/z)-pi
    tp=2*pi/(o*s)
    t=tp
    while abs((1/s)*exp(-z*o*t)*sin((o*s*t)+phi))>0.05
        t=t+tp
    end
    while abs((1/s)*exp(-z*o*t)*sin((o*s*t)+phi))<0.05
        t=t-0.1
    end
    tr(n)=t
    zz(n)=z
    n=n+1
end
%   calcul pour z supérieur ou égal à 1 (compris entre 1 et 10)
z=1
t=2.5
while z<10
    z=z+0.1
    t1=1/(o*(z-sqrt(z*z-1)))
    t2=1/(o*(z+sqrt(z*z-1)))
    while abs((1/(t2-t1))*(t1*exp(-t/t1)-t2*exp(-t/t2)))>0.05
        t=t+0.1
    end
    tr(n)=t
    zz(n)=z
    n=n+1
end
% tracé de la courbe
loglog (zz,tr)
axis ([0.01 10 1 1000])
xlabel ('coefficient d amortissement')
ylabel ('temps de réponse réduit')
grid on
*****
```

6-2 TRACE DE L'ABaque DE BLACK.

6-2-1. RAPPEL

L'abaque de Black est un diagramme permettant le passage de la fonction de transfert en boucle ouverte vers la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan de Black pour un système à retour unitaire.

Considérons un système à retour unitaire quelconque de FTBO: $H(p)$

Sa FTBF est alors: $G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$

Pour effectuer le passage inverse, on procède au calcul suivant en laissant implicite la variable p :

$$\begin{aligned} G &= \frac{H}{1+H} = \frac{H+1}{1+H} - \frac{1}{1+H} = 1 - \frac{1}{1+H} \\ \Rightarrow 1-G &= \frac{1}{1+H} \\ \Rightarrow 1+H &= \frac{1}{1-G} \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{1-G} - 1 = \frac{1}{1-G} - \frac{1-G}{1-G} = \frac{G}{1-G} \end{aligned}$$

$$\text{et finalement: } H(p) = \frac{G(p)}{1-G(p)} \quad (6-1)$$

6-2-2. MISE EN EQUATIONS

Le lieu de Black d'une fonction $F(p)$ est le lieu de la fonction complexe $F(j\omega)$.

La FTBO $G(j\omega)$ est une fonction complexe que l'on peut mettre sous la forme:

$$G = \lambda [\cos \theta + j \sin \theta].$$

$$\text{En vertu de 6-1, on peut alors écrire: } H = \frac{\lambda [\cos \theta + j \sin \theta]}{1 - \lambda [\cos \theta + j \sin \theta]} = \frac{\lambda [\cos \theta + j \sin \theta]}{(1 - \lambda \cos \theta) - j \lambda \sin \theta}$$

$$H = \frac{\lambda [\cos \theta + j \sin \theta]}{(1 - \lambda \cos \theta) - j \lambda \sin \theta}$$

Ceci est l'expression de la FTBO en fonction des paramètres θ et λ de la FTBF.

En fixant θ et λ , on obtient donc par cette formule le point M de la FTBO correspondant à une amplitude λ et une phase θ en Boucle Ouverte.

En fixant θ et en faisant varier λ , on obtiendra une courbe représentant les lieux du diagramme de Black pour lesquels la phase de la FTBF est constante et égale à θ .

En fixant λ et en faisant varier θ , on obtiendra une courbe représentant les lieux du diagramme de Black pour lesquels l'amplitude de la FTBF est constante et égale à λ .

6-2-3. PROGRAMME.

Le programme ci-dessous effectué sur GNUPLOT, réalise le tracé de l'abaque de black représenté page suivante.

```
*****
# abaque de black.

#paramètres de tracé
set parametric
set nokey
set grid
set trange[-pi:0]
set xrange[-180:0]
set yrange[-15:30]
set sample 2000
set title "Black Frequency Response"
set xlabel "phi (degrés.)"
set ylabel "Adb=20.logA"

#contours lambda(dB)=10,8,6,4,3,2.3,1,0.5,0.1,0,-0.5,-0.8,-3,-5,-8
r=3.98
G(t)=r*(cos(t)+{0,1}*sin(t))/((1-r*cos(t))-({0,1}*r*sin(t)))
phi1(t)=(180/pi)*arg(G(t))
ro1(t)=20*log10(abs(G(t)))

#contours phi(°)=2,5,8,16,30,50,80,100,120,140,160
r=179
H(t)=t*(cos((pi/180)*r)+{0,1}*sin((pi/180)*r))/((1-t*cos((pi/180)*r))-({0,1}*t*sin((pi/180)*r)))
phi2(t)=(180/pi)*arg(H(t))
ro2(t)=20*log10(abs(H(t)))

#tracé
plot
r=3.16,phi1(t),ro1(t),r=2.51,phi1(t),ro1(t),r=1.99,phi1(t),ro1(t),r=1.58,phi1(t),ro1(t),r=1.41,phi1(t),r
o1(t),r=1.303,phi1(t),ro1(t),r=1.12,phi1(t),ro1(t),r=1.06,phi1(t),ro1(t),r=1.011,phi1(t),ro1(t),r=1,phi
1(t),ro1(t),r=0.944,phi1(t),ro1(t),r=0.891,phi1(t),ro1(t),r=0.708,phi1(t),ro1(t),r=0.562,phi1(t),ro1(t),r
=0.398,phi1(t),ro1(t),r=178,phi2(t),ro2(t),r=175,phi2(t),ro2(t),r=172,phi2(t),ro2(t),r=164,phi2(t),ro2
(t),r=150,phi2(t),ro2(t),r=130,phi2(t),ro2(t),r=100,phi2(t),ro2(t),r=80,phi2(t),ro2(t),r=60,phi2(t),ro2(
t),r=40,phi2(t),ro2(t),r=20,phi2(t),ro2(t)
```

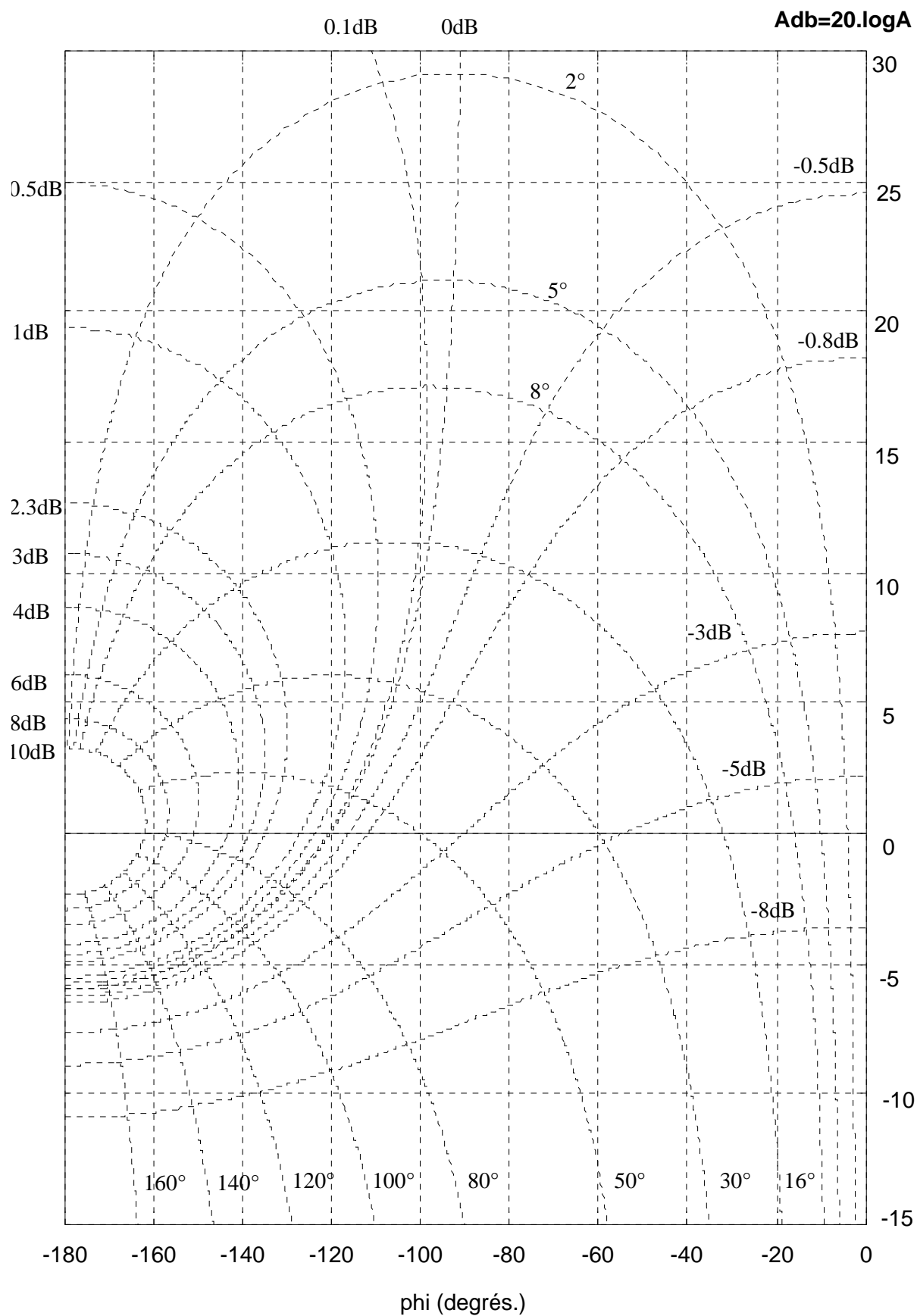


Fig 6-8: Abaque de BLACK.

6-3 COMPLEMENTS SUR LES DECIBELS.

Le Bell, nommé ainsi en hommage à Graham Bell (1847-1922), permet d'exprimer un rapport d'énergies ou de puissances sous forme logarithmique. Par exemple, le rapport d'énergies du système suivant est égal à : $\alpha = \log_{10}\left(\frac{W2}{W1}\right)$ exprimé en Bell.



Le décibel correspond à 0.1 Bell, la relation précédente devenant : $\beta = 10\alpha = 10\log_{10}\left(\frac{W2}{W1}\right)$ exprimé en décibel.

REMARQUE 1 : Il ne s'agit pas à proprement parler d'une unité puisque le décibel, qui est un rapport, n'a pas de dimension physique.

REMARQUE 2 : Le décibel est utilisé pour toutes sortes de grandeurs, pression acoustique, puissance électrique, tension, etc. Ainsi on rencontre le dB SPL (sound Pressure Level), le dBu, le dBv, le dBm, etc.

Lorsque le rapport concerne des grandeurs telles que la pression ou la tension, la formulation du rapport change : Par exemple, $KdB = 10\log_{10}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = 20\log_{10}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$. Ceci est simplement dû au fait que l'énergie est proportionnelle au carré de la tension dans ce cas : $P = \frac{u^2}{R}$.





L'expression d'une grandeur en décibel implique obligatoirement la définition d'une grandeur de référence. D'une manière générale : $KdB = 20\log_{10}\left(\frac{G}{G_{ref}}\right)$. Dans le cas du diagramme de Bode, la grandeur de référence est égale à 1.

Exemple : cas de l'acoustique.

Le système auditif humain possède une caractéristique remarquable (loi de Fechner) : La sensation subjective est à peu près proportionnelle au logarithme de l'excitation (pression acoustique). En

d'autres termes, l'augmentation de l'intensité subjective est identique entre 0.1 et 0.2 Pa ou entre 1 et 2 Pa.

Le plus faible signal qu'une oreille « moyenne » peut percevoir à une fréquence de 1000 Hz correspond à une pression de $2 \cdot 10^{-5}$ Pa, tandis que la pression maximale supportable est d'environ 200 Pa, soit un rapport d'environ 10^7 .

Ces deux particularités conduisent naturellement au choix d'une notation logarithmique et d'une expression en décibels des pressions acoustiques. On définit donc le décibel acoustique (SPL) comme $KdB = 20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)$, avec p : pression acoustique mesurée et p_{ref} pression acoustique de référence, qui est la plus faible audible ($2 \cdot 10^{-5}$ Pa). Pour une telle pression acoustique on obtient donc une valeur de 0 dB.

Pour la pression maximale, on obtient $KdB = 20 \log_{10} \left(\frac{200}{2 \cdot 10^{-5}} \right) = 140dB$.

REMARQUE : Comme il a déjà été signalé, la formulation est différente si l'on prend en compte des énergies qui sont des intensités acoustiques exprimées en W/m^2 dans ce cas :

$KdB = 10 \log_{10} \left(\frac{W}{W_{ref}} \right)$. Les résultats sont naturellement identiques, avec $W_{ref} = 10^{-12} W/m^2$ et $W_{max} = 100 W/m^2$, soit un rapport de 10^{14} . Pour la pression maximale, $KdB = 10 \log_{10} \left(\frac{100}{10^{-12}} \right) = 140dB$

Cas des signaux électriques.

Les schémas ci-dessous illustrent la notation en dB.

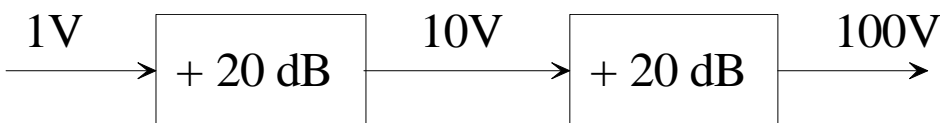
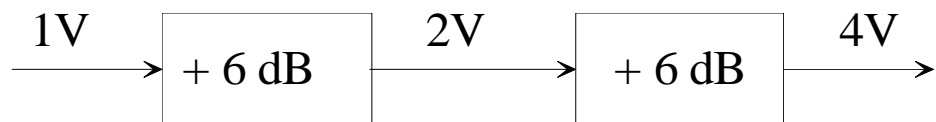
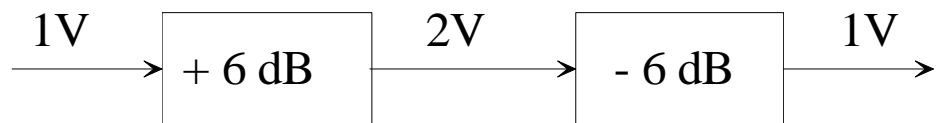
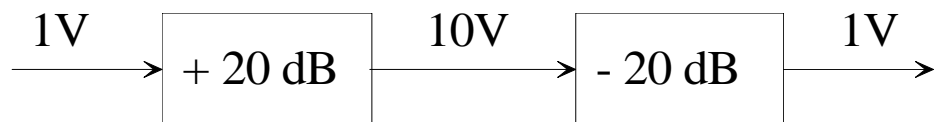


TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL**1-1 DERIVEES**

- 1-1-1 Définitions
- 1-1-2 Variation d'une fonction
- 1-1-3 Calcul des dérivées
- 1-1-4 Linéarisation d'une fonction autour d'un point

1-2 INTEGRALES

- 1-2-1 Introduction
- 1-2-2 Interprétation géométrique. Sommes de Darboux
- 1-2-3 Méthodes de calcul approché
- 1-2-4 Méthodes de calcul direct

1-3 SERIES ENTIERES**1-4 ETUDE DE FONCTIONS**

- 1-4-1 Fonctions circulaires
- 1-4-2 Fonction Arctg
- 1-4-3 Fonction Log en coordonnées logarithmiques
- 1-4-4 Réponse d'un système du premier ordre à un échelon
- 1-4-5 Réponse d'un système du second ordre à un échelon

CHAPITRE 2 : LES NOMBRES COMPLEXES**2-1 DEFINITIONS ET PROPRIETES****2-2 REPRESENTATION GRAPHIQUE****2-3 FORME TRIGONOMETRIQUE****2-4 NOTATION EXPONENTIELLE****2-5 RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE****2-6 TRACE D'UNE COURBE DANS LE PLAN COMPLEXE**

CHAPITRE 3 : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES**3-1 POLYNOMES**

3-1-1 Factorisations

3-1-2 Un polynôme particulier : le trinôme du second degré

3-2 FRACTIONS RATIONNELLES

3-2-1 Définitions

3-2-2 Pratique de la décomposition des fractions rationnelles

3-2-3 Exemples

CHAPITRE 4 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES**4-1 PRESENTATION****4-2 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE**

4-2-1 Méthode de résolution

4-2-1-1 Solution sans second membre

4-2-1-2 Solution avec second membre

4-2-1-3 Solution complète

4-2-2 Exemples

4-2-2-1 Système soumis à une entrée échelon

4-2-2-2 Système soumis à une entrée rampe

4-2-2-3 Système soumis à une entrée Harmonique

4-3 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

4-3-1 Généralités

4-3-2 Méthode de résolution

4-3-2-1 Solution sans second membre

4-3-2-2 Solution avec second membre

4-3-2-3 Solution complète

4-3-3 Exemples

4-3-3-1 Réponse à une entrée échelon

4-3-3-2 Réponse à une entrée rampe

4-3-3-3 Réponse à une entrée Harmonique

CHAPITRE 5 : LA TRANSFORMATION DE LAPLACE**5-1 DEFINITION****5-2 PROPRIETES**

5-2-1 Unicité

5-2-2 Linéarité

5-2-3 Image de la dérivée

5-2-4 Théorème du retard

5-2-5 Théorèmes de la valeur finale et de la valeur initiale

5-3 TRANSFORMEES USUELLES

5-3-1 Fonction Impulsion

5-3-2 Fonction Echelon

5-3-3 Fonction Rampe

5-3-4 Autres fonctions. Tables de transformées.

5-4 APPLICATION A LA RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

5-4-1 Equations différentielles du premier ordre.

5-4-1-1 Système soumis à une entrée échelon

5-4-1-2 Système soumis à une entrée rampe

5-4-1-3 Système soumis à une entrée harmonique

5-4-2 Equations différentielles du second ordre.

5-4-2-1 Système soumis à une entrée échelon

5-4-2-2 Système soumis à une entrée rampe

5-4-2-3 Système soumis à une entrée harmonique

CHAPITRE 6 : ANNEXES**6-1 TEMPS DE REPONSE D'UN SYSTEME DU SECOND ORDRE****6-2 TRACE DE L'ABAQUE DE BLACK****6-3 COMPLEMENTS SUR LES DECIBELS**